Que sais-je?

COLLECTION ENCYCLOPÉDIQUE
fondée par Paul Angoulvent

Derniers titres parus

Que sais-je ?

LA THÉORIE DES ENSEMBLES

1366

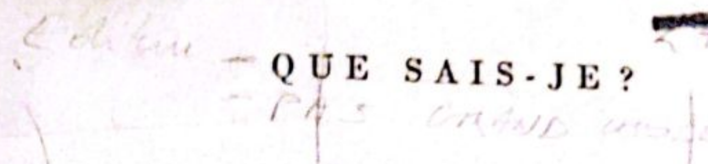
que sais-je ?

LA THÉORIE DES ENSEMBLES

ALAIN BOUVIER



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE



QUE SAIS-JE ?

La théorie des ensembles

ALAIN BOUVIER
Maître-Assistant à l'Université Lyon 1

Troisième édition refondue

35e mille



DU MÊME AUTEUR

Théorie élémentaire des séries, Hermann, Paris, 1971.

Groupes. Observation. Théorie. Pratique (avec D. Richard), Hermann, Paris, 2e éd., 1978.

— *Dictionnaire des Mathématiques* (avec M. George, sous la direction de F. Le Lionnais), Presses Universitaires de France, 1979.

La mystification mathématique, Hermann, Paris, 1981.

ISBN 2 13 037231 7

Dépôt légal — 1re édition : 1969
3e édition refondue : 1982, août

INTRODUCTION

La première édition de cet ouvrage parut en 1969, quelques mois avant la mise en place de nouveaux programmes dans l'enseignement secondaire et notamment l'introduction de ce que les médias allaient appeler les mathématiques modernes. Nous crûmes utiles de développer longuement une théorie formelle des relations abstraites dans le cadre le plus général possible, encouragé en cela par les résultats d'expériences menées tant au niveau de l'école élémentaire que des classes de 6e et 5e. Suivant les pédagogues de cette époque, nous avions adjoint aux symboles et vocabulaire habituellement utilisés par les mathématiciens une importante quantité de termes et de signes introduits dans les classes pour faciliter de la part des élèves la compréhension de certains concepts.

Douze ans après, les enseignants abandonnent les présentations formelles au profit d'approches basées sur l'expérience sensible des enfants. La théorie des ensembles cesse d'apparaître comme un préalable à toute éducation mathématique. Elle redevient avant tout ce langage, ce vocabulaire commun aux mathématiciens qu'elle n'aurait jamais dû cesser d'être. Certes, elle demeure un domaine de recherche. Mais pourquoi ces travaux de spécialistes devraient-ils conduire à l'introduction de longs développements formels au niveau de l'enseignement élémentaire et secondaire ?

Partant de ces considérations nous avons refondu notre texte en nous fixant quelques règles simples :

— Limiter le formalisme et le vocabulaire à son strict minimum.

— Ne développer de la théorie des relations que la partie indispensable aux autres domaines des mathématiques : ordres, équivalences, fonctions.

— Ne pas traiter la théorie des ensembles comme étrangère aux différentes branches des mathématiques et pour cela augmenter les exemples empruntés à d'autres secteurs, particulièrement à la théorie des nombres, à la géométrie et à l'analyse.

— Introduire la notion d'ordinal.

— Augmenter des informations sur l'histoire de la théorie des ensembles, de sa genèse aux travaux actuels.

— Présenter quelques sujets tournés vers des applications à d'autres sciences comme les fonctions caractéristiques d'ensembles et les ensembles flous.

— Proposer des suggestions pour des lectures complémentaires.

— Améliorer la qualité de l'index terminologique et lui adjoindre un index des notations pour faire de ce texte un véritable « manuel d'introduction » à la théorie des ensembles.

Comme toute langue vivante, celle des ensembles possède ses abus. Tout en signalant ses principaux, nous ne nous sommes pas interdit de les utiliser afin de donner au texte un maximum de simplicité.

Pour dire vrai, la théorie des ensembles commence où ce livre s'arrête. Nous espérons que les lecteurs pourront à l'aide de ce modeste ouvrage accéder plus facilement aux textes de référence que nous indiquons à la fin.

CHAPITRE PREMIER

ALGÈBRE DES ENSEMBLES

« ... Et mieux vaudra alors ne pas parler de « théorie des ensembles » mais simplement d'un vocabulaire ou d'une grammaire. »

Laurent SCHWARTZ.

I. — Ensembles. Sous-ensembles

1. La notion intuitive d'ensemble. — L'expression « ensemble d'objets » évoque l'idée de collection, de groupement, de rassemblement de ces objets, tout en laissant une certaine imprécision sur ce dont il s'agit en réalité.

En mathématique, avant d'être utilisé, un concept doit avoir été défini d'une façon *précise* ne laissant aucune ambiguïté sur son emploi et les limites de ce dernier. La notion d'ensemble paraît à *première vue* échapper à cette règle puisque les mathématiciens semblent se contenter de ce qu'ils nomment : « une idée intuitive de la notion d'ensemble ». Pourtant l'usage montre rapidement que le mot « ensemble » subit, en mathématique, des restrictions qu'il ne connaît pas dans le langage ordinaire. Pour l'instant, nous allons adopter l'attitude commode suivante : *la notion d'ensemble est une notion primitive de la mathématique.* C'est-à-dire que nous n'en donnons pas de définition, de la même façon que

cela se fait en géométrie pour le point, la droite ou le plan. Nous considérons que tout le monde comprend *intuitivement* ce concept, et que *nous en avons tous la même idée.*

— Les objets qui constituent un ensemble sont appelés les *éléments* de cet ensemble ; les nombres 12, — 5, 0, — 17 sont des éléments de l'ensemble **Z** des entiers.

— Nous noterons les ensembles par des lettres majuscules d'imprimerie : E, F, G,... et leurs éléments par des minuscules x, y, z... Soit x un élément d'un ensemble E ; on écrit :

$$x \in E$$

ce qui se lit « x appartient à E » et $\in$ est dit symbole d'appartenance. Au contraire, si x n'est pas un élément de E, nous écrivons :

$$x \notin E$$

ce qu'il faut lire « x n'appartient pas à E ».

— Exemple : Soit 2**Z** l'ensemble des entiers pairs ; on a :

$$12 \in 2\mathbf{Z}\,; \quad 3 \notin 2\mathbf{Z}\,; \quad -7 \notin 2\mathbf{Z}\,; \quad 0 \in 2\mathbf{Z}\,; \quad -8 \in 2\mathbf{Z}.$$

— *A priori*, rien ne semble nous empêcher de parler de l'ensemble des triangles, de l'ensemble des lecteurs de ce livre ou de « l'ensemble de tous les ensembles ». Mais de telles considérations conduisent à des paradoxes que nous évoquerons au dernier chapitre de cet ouvrage. Pour éviter de telles complications, nous allons limiter l'emploi du mot « ensemble » en faisant une convention qui peut sembler arbitraire au débutant, mais qui se justifiera par la suite. Convenons qu'*un même être mathématique ne peut jamais être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble.* En particulier, ceci nous interdit d'écrire $a \in a$ et de parler de « l'ensemble

de tous les ensembles » puisque, par définition, ce dernier devrait être un élément de lui-même.

— Nous allons décrire les deux façons usuelles de définir un ensemble.

— Lorsqu'on peut dresser la liste des éléments de l'ensemble E considéré, par exemple l'ensemble $D(24)$ des diviseurs entiers naturels de 24 peut être défini par :

$$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

on dit alors que l'ensemble E est *défini en extension.*

— Pour définir en extension un ensemble dont « le nombre » des éléments est « infini », on écrit quelques éléments de cet ensemble suivis de points de suspension, *à la condition que tout lecteur puisse comprendre, sans aucune ambiguïté, de quoi il s'agit.*

— Exemple : On désigne par **N** l'ensemble des entiers naturels ou entiers positifs :

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

— Lorsque aucune confusion n'est possible, on utilise également des points de suspension pour abréger l'écriture de certains ensembles « finis » donnés en extension. Ainsi, l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ peut s'écrire $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

— Deuxième cas : Considérons l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 24. Il est bien défini car nous pouvons dire si tel ou tel entier lui appartient.

— Nous dirons qu'un ensemble E est donné en *compréhension* si l'on connaît une propriété telle qu'un objet appartienne à E si, et seulement s'il vérifie cette propriété *(propriété caractéristique de l'ensemble E).*

— Exemple : Désignons par | le symbole de la divisibilité dans l'ensemble des entiers naturels ;

$$a \mid b \text{ se lit « } a \text{ divise } b \text{ ».}$$

— L'ensemble $D(24)$ des diviseurs entiers naturels de 24 est défini en compréhension par :

$$D(24) = \{x\ ;\ x \in \mathbf{N} \text{ et } x \mid 24\}.$$

ce qui se lit : « $D(24)$ égal l'ensemble des x tels que x est entier naturel et x divise 24. »

— Les ensembles de nombres usuels bénéficient d'une notation particulière :

Ensemble des entiers rationnels ou entiers ...	$\mathbf{Z}$
Ensemble des nombres rationnels............	$\mathbf{Q}$
Ensemble des nombres décimaux	$\mathbf{D}$
Ensemble des entiers de Gauss	$\mathbf{Z}[i]$
Ensemble des nombres réels	$\mathbf{R}$
Ensemble des nombres complexes	$\mathbf{C}$
Ensemble des multiples entiers rationnels de n	$n\mathbf{Z}$
Ensemble des réels compris entre a et b	$[a, b]$

Enfin, on note $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire $m + n\sqrt{2}$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$.

2. Egalité de deux ensembles. — Deux ensembles A et B sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments ; on écrit :

$$A = B.$$

— C'est encore dire que x est un élément de A si et seulement s'il est élément de B :

$$x \in A \text{ si et seulement si } x \in B.$$

— Ceci s'écrit encore $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Le signe $\Leftrightarrow$, appelé *symbole d'équivalence logique*, se lit « *si et seulement si* » ou « *équivaut à* ».

— Il est d'usage, dans l'écriture d'un ensemble défini en extension, de ne faire figurer qu'une seule fois chaque élément. Au lieu de $\{3, 1, 2, 1\}$, on écrit $\{3, 1, 2\}$.

— Par définition de l'égalité de deux ensembles,

$$\{2, 3, 5, 7\} \quad \text{et} \quad \{5, 2, 7, 3\}$$

sont deux ensembles égaux :

$$\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 2, 7, 3\}.$$

— Lorsque l'on écrit un ensemble en extension, *l'ordre dans lequel figurent les éléments peut être quelconque.*

— Dire que deux ensembles A et B sont *distincts* (on écrit $A \neq B$ ce qui se lit « A différent de B ») revient à dire qu'il existe au moins un élément de l'un qui n'est pas élément de l'autre.

— Exemple : $A = \{2, 3, 5, 7\}$ est différent de $B = \{2, 3, 5, 8\}$ car $7 \in A$ et $7 \notin B$.

— L'égalité d'ensembles possède les propriétés suivantes :

a) Pour tout ensemble E, on a $E = E$ (on dit que l'égalité est *réflexive*).

b) Si $E = F$, alors $F = E$ (on dit que l'égalité est *symétrique*).

c) Si $E = F$ et si $F = G$, alors $E = G$ (on dit que l'égalité est *transitive*).

— En pratique, il n'est pas toujours facile de démontrer l'égalité de deux ensembles. Nous verrons plus loin quelle est la méthode employée le plus souvent pour faire une telle démonstration.

3. Ensembles particuliers. — On dit qu'un ensemble E qui ne possède aucun élément est un *ensemble vide* et l'on écrit :

$$E = \varnothing \qquad \varnothing \text{ se lit « ensemble vide ».}$$

— *Exemple :* En géométrie euclidienne, l'ensemble des triangles rectangles équilatéraux est vide.

— L'ensemble vide se caractérise par le fait que $a \in \varnothing$ est *toujours faux* ou encore que $a \notin \varnothing$ est toujours vrai. Nous conviendrons de l'unicité de l'ensemble vide.

— *Remarques.* — 1) Cette « définition naïve » de l'ensemble vide est logiquement critiquable ; nous signalerons plus loin

une autre façon de l'introduire qui permet de démontrer son unicité. La plupart du temps l'ensemble vide est « défini » par la donnée d'un axiome (voir chap. VI).

2) Des phrases telles que : « l'ensemble des cercles ayant deux côtés égaux » ne caractérisent pas l'ensemble vide. Elles sont contradictoires en elles-mêmes, dépourvues de sens et de ce fait ne définissent aucun ensemble.

— Soit E un ensemble formé d'un seul élément a ; on dit que E est un *singleton* et l'on écrit :

$$E = \{a\}.$$

Par exemple, étant donné $a \in \mathbf{R}$, on a : $[\![a, a]\!] = \{a\}$.

— Il est fondamental de distinguer l'*élément* a de l'*ensemble* $\{a\}$. En particulier, nous avons exclus d'écrire $a \in a$; au contraire, il est tout à fait correct de noter : $a \in \{a\}$.

— Si un ensemble E est formé de deux éléments a et b distincts, on dit que E est une *paire*, et l'on écrit :

$$E = \{a, b\}.$$

— Comme nous l'avons remarqué plus haut, l'ordre dans lequel on écrit les éléments d'un ensemble peut être quelconque ; donc les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux ; *avec deux éléments distincts on peut construire une et une seule paire*

$$\{a, b\} = \{b, a\}.$$

— Exemple de paire : $p \in \mathbf{N}$ est un nombre premier si, et seulement si, l'ensemble $D(p)$ de ses diviseurs entiers naturels est une paire ; alors :

$$D(p) = \{1, p\}.$$

4. Diagrammes de Venn-Euler. — Pour nous guider dans nos raisonnements, nous schématiserons les ensembles par des figures telles qu'un cercle, un carré, un rectangle, ou *n'importe quelle ligne fermée sans point double.*

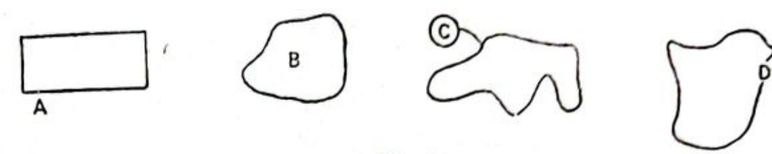
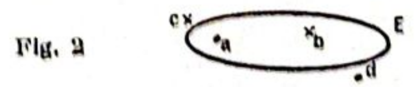


Fig. 1

— On donne à de telles figures le nom de *diagrammes de Venn-Euler*, ou simplement *diagrammes de Venn.* Sur la figure 1, nous avons mis en évidence différentes façons de faire apparaître le nom de l'ensemble dessiné. Dans chaque cas particulier, nous utiliserons le moyen qui nous semblera le plus compréhensible. Lorsque nous symbolisons un ensemble par un diagramme de Venn les éléments de cet ensemble sont les points à l'intérieur de la ligne fermée qui le représente. Les objets qui n'appartiennent pas à l'ensemble sont les points extérieurs à cette ligne. Pour éviter toute confusion, nous conviendrons que *tous les éléments de l'ensemble représenté* sont à l'intérieur du dessin et jamais sur sa frontière. Si nous avons besoin de mettre en évidence un élément particulier nous le représentons par un point ou une croix, comme nous l'avons fait sur la figure ci-dessous.

Fig. 2


— Ce dessin nous fournit les informations suivantes :

$$a \in E; \quad b \in E; \quad c \notin E; \quad d \notin E.$$

5. Sous-ensembles. — Considérons deux ensembles A et B ; nous dirons que A est *inclus dans* B, que A est un *sous-ensemble* de B, ou que A est une *partie* de B si tous les éléments de A sont des éléments de B et nous écrirons :

$$A \subset B \quad \text{(on lit « } A \text{ inclus dans } B \text{ »)}$$

et $\subset$ est le *symbole de l'inclusion (au sens large).*

— Exemple : Si $A = \{a, b\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$, alors $A \subset B$. Au lieu de noter $A \subset B$, on écrit parfois $B \supset A$, ce qui se lit : « *B contient A* ». Autre exemple : $[\![-2, 3]\!] \subset [\![-10, 5]\!]$.

— Nous allons utiliser des diagrammes pour symboliser l'inclusion d'un ensemble dans un autre.

— Sur la figure 3 *a* nous avons mis en évidence un sous-ensemble A de l'ensemble B, car tout élément x de A est effectivement un élément de B, donc $A \subset B$.

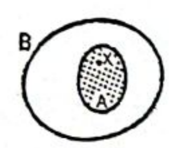


Fig. 3 *a*

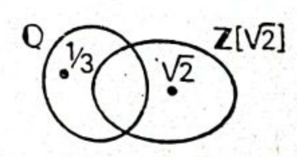


Fig. 3 *b*

— En revanche, sur la figure 3 *b*, **Q** n'est pas inclus dans $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ puisque :

$$\frac{1}{3} \in \mathbf{Q} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$$

et $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ n'est pas inclus dans **Q** car :

$$\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}.$$

— Pour démontrer qu'un ensemble A n'est pas contenu dans un ensemble B, il suffit de prouver que A possède au moins un élément n'appartenant pas à B. C'est la méthode que nous avons employée ci-dessus. Dans ce cas on écrit $A \not\subset B$; cela ne veut pas dire pour autant que B soit inclus dans A.

— *Remarque.* — Soit A un sous-ensemble de B ; par définition : « si $x \in A$ alors $x \in B$ » ; pour abréger une telle expression, on introduit le signe $\Rightarrow$ appelé *symbole d'implication*. « $x \in A \Rightarrow x \in B$ » se lit « si $x \in A$, alors $x \in B$ » ; plus souvent on dit « $x \in A$ *entraîne* $x \in B$ » ou « $x \in A$ *implique* $x \in B$ ».

— On peut alors donner la définition de l'inclusion sous la forme suivante :

$$A \subset B \text{ si et seulement si } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

— Soit A un sous-ensemble de B, distinct de B ; on dit que A est un sous-ensemble (ou une partie) *propre* de B, on écrit :

$A \subsetneqq B$ ce qui se lit « *A strictement* inclus dans *B* »

et $\subsetneqq$ est le symbole de l'*inclusion au sens strict*. Certains auteurs utilisent le symbole $\subseteq$ pour l'inclusion au sens large. Ils notent alors $\subset$ pour l'inclusion au sens strict.

— On peut démontrer que l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble E :

$$\varnothing \subset E.$$

— Soit x un élément de E ; puisque $\{x\}$ est une *partie* de E, on peut écrire :

$$\{x\} \subset E,$$

mais il serait incorrect de noter $x \subset E$ ou $\{x\} \in E$.

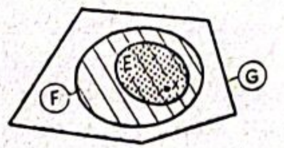
6. **Propriétés de l'inclusion.** — Donnons maintenant les propriétés usuelles de l'inclusion.

A) Tout ensemble E est un sous-ensemble de lui-même ; on dit que l'inclusion est *réflexive* :

$$E \subset E.$$

B) Supposons que E soit un sous-ensemble de F lui-même inclus dans G ; alors E est un sous-

Fig. 4



ensemble de G (fig. 4). En effet, si $x \in E$, puisque $E \subset F$, l'élément x est un élément de F. L'ensemble F étant lui-même un sous-ensemble de G, $x \in F$ entraîne $x \in G$. Finalement : $x \in E$ entraîne

$x \in G$. Cela prouve, par définition de l'inclusion, que E est un sous-ensemble de G. On dit que l'inclusion est *transitive* :

$$E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset G \quad \text{entraînent} \quad E \subset G.$$

C) Deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, E est un sous-ensemble de F et F un sous-ensemble de E ; on dit que l'inclusion est *antisymétrique* :

$$(E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E) \Leftrightarrow (E = F).$$

Si $E = F$, les ensembles E et F sont formés des mêmes objets ; donc si x est un élément de E, alors x est un élément de F et $E \subset F$. De même, si x est un élément de F, alors x est aussi un élément de F et $F \subset E$. Donc si $E = F$, alors $E \subset F$ et $F \subset E$.

Cette dernière propriété fournit la méthode usuelle de démonstration de l'égalité de deux ensembles. On l'appelle la *méthode de la double inclusion*. Pour démontrer qu'un ensemble A est égal à un ensemble B, on établit successivement que A est inclus dans B et que B est inclus dans A. Nous ne donnons pas d'exemple d'utilisation de cette méthode, nous aurons souvent l'occasion de l'employer par la suite.

7. **Diagrammes linéaires.** — Lorsque le nombre des ensembles considérés est important, les diagrammes de Venn deviennent incompréhensibles en raison de l'enchevêtrement des dessins. On leur substitue un autre type de diagrammes : on représente un ensemble par un point ou une lettre et l'on relie par une flèche chaque ensemble à tout ensemble qui le contient (fig. 5). Ces diagrammes

A ⟶ B ou A ⊂⟶ B

Fig. 5

sont parfois appelés *diagrammes linéaires*. La figure 6 présente les ensembles de nombres usuels. En raison de la transitivité de l'inclusion, plusieurs flèches sont omises.

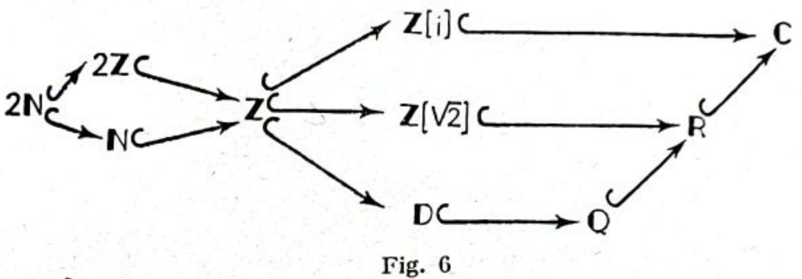


Fig. 6

II. — Intersection. Réunion

1. **Intersection de deux ensembles.** — Considérons les deux ensembles A et B suivants :

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{et} \quad B = \{b, d, h\}.$$

Tous les éléments de l'ensemble $C = \{b, d\}$ appartiennent à A *et* à B ; en outre, ce sont les seuls éléments qui sont communs à A et B. On dit que C est *l'intersection* de A et de B.

– D'une façon plus générale, on appelle *intersection des deux ensembles A et B* l'ensemble noté $A \cap B$ (on lit « A inter B ») des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Sur la figure ci-dessous, on peut voir, en hachuré, l'intersection des ensembles A et B. Le symbole $\cap$ est appelé *symbole d'intersection*.

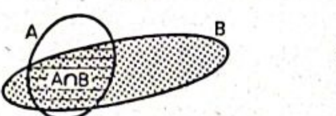


Fig. 7

– Exemples : 1) Dans un plan, l'intersection de l'ensemble des losanges et de l'ensemble des rectangles est l'ensemble des carrés.

2) $D(24) \cap D(20) = \{1, 2, 4\}$: l'ensemble des nombres entiers naturels qui divisent, à la fois, 24 et 20 est formé des nombres 1, 2 et 4.

3) $8\mathbf{Z} \cap 12\mathbf{Z} = 24\mathbf{Z}$: l'ensemble des multiples entiers de 8 et de 12 est l'ensemble des multiples entiers de 24.

4) $\mathbf{Z}[i] \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

— En compréhension, l'intersection de A et B est définie par :

$$A \cap B = \{x;\ \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

— Examinons les propriétés de l'intersection.

1) $A \cap B = B \cap A$: on dit qu'elle est *commutative*.

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: on dit qu'elle est *associative*.

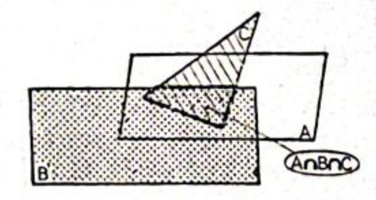


Fig. 8

— Cette formule se démontre par la méthode de la double inclusion ; on établit successivement que

$$(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$$

et que $$A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C.$$

— Les parenthèses étant inutiles, nous écrirons dorénavant :

$A \cap B \cap C$ au lieu de $A \cap (B \cap C)$ ou de $(A \cap B) \cap C$.

— Illustrons ceci par un exemple ; si :

$$A = \{a, x, t, y\},\quad B = \{b, y, t\},\quad C = \{a, t, b, c\}$$

d'une part :

$$A \cap B = \{t, y\} \quad \text{donc} \quad (A \cap B) \cap C = \{t\}$$

d'autre part :

$$B \cap C = \{b, t\} \quad \text{donc} \quad A \cap (B \cap C) = \{t\}.$$

— Finalement :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \{t\}.$$

— On écrit :

$$A \cap B \cap C = \{t\}.$$

3) L'intersection est *idempotente* : $A \cap A = A$.

4) On a toujours $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ car un élément de $A \cap B$ appartient par définition à A et à B.

5) Soit A un sous-ensemble de B; alors $A \cap B = A$.

Fig. 9



6) L'ensemble vide joue, pour l'intersection, le même rôle que *zéro* pour la multiplication dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels où l'on a $x.0 = 0$, si $x \in \mathbf{R}$. L'intersection de n'importe quel ensemble A avec l'ensemble vide est toujours vide :

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

— Dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels :

$$x.y = 0 \quad \text{entraîne} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0.$$

Pour l'intersection il n'en est pas de même : il se peut que deux ensembles *non vides* A et B aient une intersection vide. S'il en est ainsi, on dit que A et B sont *deux ensembles disjoints*.

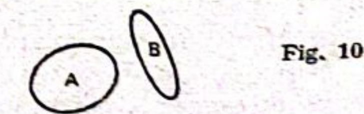


Fig. 10

—Exemples : 1) Dans un plan les ensembles A des triangles équilatéraux et B des triangles rectangles sont disjoints, sinon il existe un triangle $t \in A \cap B$. Puisque $t \in A$, t est équilatéral et ses trois angles mesurent 60°. D'autre part, puisque $t \in B$, t est un triangle rectangle et il possède un angle de 90°. D'où une contradiction.

—2) Dans Z, les ensembles A des entiers de la forme $6n + 1$ et B des entiers de la forme $6m + 2$ sont disjoints.

—3) Les intervalles $[-1, 3]$ et $[4, 17]$ sont disjoints ; par contre $[-1, 3]$ et $[2, 17]$ ne le sont pas ; $[-1, 3]$ et $[3, 17]$ ne le sont pas non plus.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles ; par définition leur *intersection* A est l'ensemble des éléments qui appartiennent à *tous* les A_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

On le note $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, ce qui se lit « intersection de i égal 1 jusqu'à n des A_i ».

—Exemple :

$A_1 = \{2, 1, 8, 16\}$; $A_2 = \{2, 1, 16, 32\}$; $A_3 = \{1, 3, 16\}$.

Alors :

$$A = \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1, 16\}.$$

—En compréhension, l'intersection des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est définie par :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x ;\ \text{pour tout } i,\ i = 1, \ldots, n,\ \ x \in A_i\}.$$

2. Réunion de deux ensembles. — Considérons à nouveau les deux ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{b, d, h\}$ du début du paragraphe précédent, et l'ensemble $D = \{a, b, c, d, h\}$. Ce dernier est formé de tous les éléments appartenant soit à A, soit à B, soit aux deux. On dit que D est la *réunion* de A et de B.

—De façon plus générale, on appelle *réunion des deux ensembles A et B* l'ensemble noté : $A \cup B$ (on lit « A union B » ou « A réunion B ») des éléments qui appartiennent à A *ou* à B. Le « ou » de la phrase précédente est *non exclusif*, c'est-à-dire qu'un élément qui appartient à A ou B peut également appartenir simultanément à A et à B.

—Sur la figure ci-dessous on peut voir, *en hachuré*,

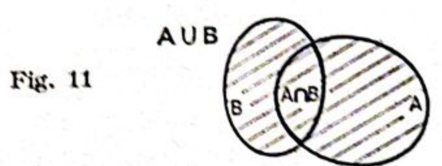


Fig. 11

la réunion des ensembles A et B (on constate qu'elle contient l'intersection $A \cap B$). Le symbole $\cup$ est appelé *symbole de réunion*. En compréhension, $A \cup C$ est défini par :

$$A \cup B = \{x ;\ \ x \in A \ \ \text{ou}\ \ x \in B\}.$$

—Si l'on compare les définitions de l'intersection et de la réunion, on voit que l'on peut déduire l'une de l'autre en changeant le « et » en « ou » et réciproquement. On a coutume de dire que ces deux notions sont *duales*. Cette dualité entre réunion et intersection peut être constatée à la lecture des propriétés de la réunion énoncées ci-dessous, que l'on peut comparer à celles de l'intersection.

—1) La réunion est commutative : $A \cup B = B \cup A$.

—2) Elle est associative :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

et l'on écrira désormais : $A \cup B \cup C$.

3) Elle est *idempotente* : $A \cup A = A$.

4) On a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

5) Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ (voir fig. 9).

6) $A \cup \emptyset = A$. On dit que l'ensemble vide est un *élément neutre* pour la réunion, propriété analogue à celle de 1 pour la multiplication dans **R** où l'on a, $x.1 = x$, si $x \in \mathbf{R}$.

La représentation schématique introduite précédemment donne pour deux ensembles A et B, leur intersection $A \cap B$ et leur réunion $A \cup B$ le diagramme ci-dessous qui traduit les inclusions :

$$\emptyset \subset A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad \emptyset \subset A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

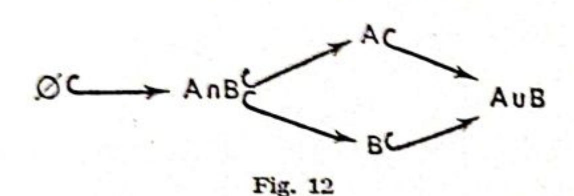


Fig. 12

—Contrairement à ce qui se passe pour l'intersection, la réunion de deux ensembles non vides n'est jamais vide puisqu'elle contient ces deux ensembles.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles donnés ; leur *réunion* A est par définition l'ensemble des éléments qui appartiennent *au moins* à l'un des A_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On la note $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, ce qui se lit « réunion de i égal 1 jusqu'à n des A_i ».

—Reprenons l'exemple donné pour l'intersection :

$$A_1 = \{2, 1, 8, 16\}; \quad A_2 = \{2, 1, 16, 32\}; \quad A_3 = \{1, 3, 16\}.$$

—Alors :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 8, 16, 32\}.$$

—En compréhension la réunion des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est définie par :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x ; \text{il existe } i, \ i = 1, \ldots, n, \ x \in A_i\}.$$

—On peut retrouver la définition de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ à partir de celle de $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ en changeant « pour tout » en « il existe ».

3. **Liens entre ces deux notions.** — Nous avons vu que la réunion et l'intersection d'ensembles jouissent de propriétés analogues. Poursuivons cette comparaison.

—Dans l'ensemble **R** des nombres réels, la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $x.(y + z) = x.y + x.z$ mais l'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication ; par exemple :

$$1 + (2.3) \neq (1 + 2).(1 + 3).$$

—Pour la réunion et l'intersection d'ensembles on peut énoncer : *l'intersection est distributive par rapport à la réunion, et la réunion est distributive par rapport à l'intersection* :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

—Nous ne donnons pas la démonstration de ces formules qui s'établissent aisément par la méthode de la double inclusion.

—Exemple : soient

$$A = \{\triangle, \bigcirc, \square\}, \quad B = \{\triangle, \sqsubset\!\sqsupset\}, \quad C = \{\bigcirc, \sqsubset\!\sqsupset\}.$$

—Alors : $B \cup C = \{\triangle, \bigcirc, \sqsubset\!\sqsupset\}$.

—Donc : $A \cap (B \cup C) = \{\triangle, \bigcirc\}$.

– D'autre part :

$$A \cap B = \{\triangle\} \qquad A \cap C = \{\bigcirc\}.$$

– Donc : $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{\triangle, \bigcirc\}$.

– Par conséquent :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

– On établit deux autres formules appelées *lois d'absorption* ou *lois de Boole* :

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A.$$

– On appelle ces formules lois d'absorption en raison de la « disparition » de l'ensemble B. A titre d'exemple, démontrons la première : d'une part, on a $A \cap (A \cup B) \subset A$ (d'après une propriété de l'intersection) ; d'autre part, puisque A est inclus dans A et que A est inclus dans $A \cup B$, A est inclus dans l'intersection de ces deux ensembles : $A \subset A \cap (A \cup B)$. Ceci démontre le résultat énoncé d'après la méthode de la double inclusion.

III. — Complémentaire. Différence

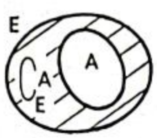
1. Complémentaire d'un sous-ensemble. — Etant donné un sous-ensemble A d'un ensemble E, on appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble noté $\complement_E A$ (on lit « complémentaire de A dans E ») des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

– Exemple :

$$E = \{2, \triangle, a, \square, 8\} \quad \text{et} \quad A = \{2, \square\}.$$

– Alors : $\complement_E A = \{\triangle, a, 8\}$.

– Sur la figure ci-dessous, le complémentaire de A par rapport à E est dessiné de deux façons :



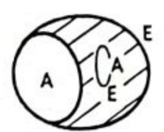


Fig. 13

– **En compréhension, le complémentaire de A par rapport à E est défini par :**

$$\complement_E A = \{x ; \ x \in E \ \text{ et } \ x \notin A\}.$$

– *Remarques.* — 1) Le complémentaire de A par rapport à E n'est défini que *si A est un sous-ensemble de E*. On a $\complement_E A \subset E$.

2) La notion de complémentaire exprime une *négation*, celle d'appartenir à A.

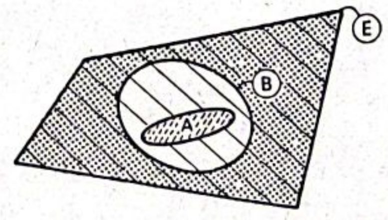
– Suivant les auteurs, le complémentaire de A dans E se note encore $E - A$ ou $E \backslash A$ ou $\bar{A}$.

– Soit A un sous-ensemble d'un ensemble E. Les ensembles A et $\bar{A}$ sont disjoints : $A \cap \bar{A} = \varnothing$; de plus :

$$A \cup \complement_E A = E \quad \text{et} \quad \complement_E(\complement_E A) = A.$$

– Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E ; on vérifie aisément (fig. 14) que

$$A \subset B \quad \text{entraîne} \quad \complement_E B \subset \complement_E A.$$



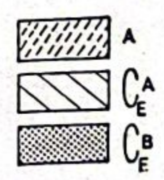


Fig. 14

De ceci, de la formule $\complement_E(\complement_E A) = A$, et de la méthode de la double inclusion, on déduit que pour deux sous-ensembles A et B de E :

$$(\complement_E A = \complement_E B) \quad \text{équivaut à} \quad (A = B).$$

Examinons maintenant deux cas particuliers : lorsque A est vide et lorsque A est égal à E tout entier ; par définition :

$$\complement_E \varnothing = \{x;\ x \in E \text{ et } x \notin \varnothing\} = E;$$

$$\complement_E E = \{x;\ x \in E \text{ et } x \notin E\} = \varnothing;$$

soit : $\complement_E \varnothing = E \qquad \complement_E E = \varnothing.$

La notion de complémentaire de A n'est pas intrinsèque, mais *relative* à un ensemble E contenant A, appelé parfois *référentiel* ou *ensemble de référence*. Pour un ensemble A donné, le changement du référentiel entraîne une modification de son complémentaire (fig. 15 *a*).

Exemple : soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{3, 4, 6, 8\}$ et $A = \{3, 4\}$;

alors : $\complement_E A = \{0, 1, 2, 5\}$

et : $\complement_F A = \{6, 8\}$.

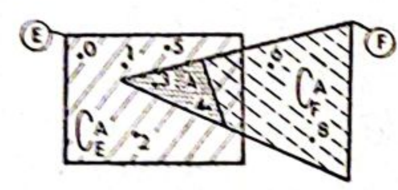


Fig. 15 *a*

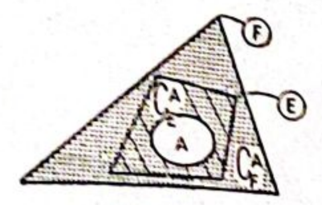


Fig. 15 *b*

En général (fig. 15 *a*) si E et F sont deux ensembles quelconques contenant A, il n'est pas possible de « comparer » $\complement_E A$ et $\complement_F A$.

Dans certains cas particuliers la situation peut être plus favorable. Par exemple si A est un sous-ensemble de E et de F (fig. 15 *b*), on a :

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\complement_E A \subset \complement_F A).$$

2. **Formules de de Morgan.** — Considérons deux sous-ensembles A et B d'un même ensemble E ; Les deux formules ci-dessous portent le nom d'un mathématicien anglais du XIXe siècle, de Morgan.

$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B,$$

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B.$$

Démontrons la première de ces formules. Comme tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de E, nous omettrons d'écrire que les éléments appartiennent à E. Soit x un élément du complémentaire de $A \cap B$. Dire que x n'appartient pas *simultanément* à A et à B c'est encore dire qu'il n'appartient pas *au moins* à l'un d'eux : $x \notin A$ ou $x \notin B$, soit encore $x \in \complement A$ ou $x \in \complement B$, donc :

$$x \in \complement A \cup \complement B.$$

Ceci établit que $\complement(A \cap B) \subset \complement A \cup \complement B$. L'inclusion opposée s'obtient de même.

Remarque. — Pour démontrer cette formule, nous avons utilisé une méthode couramment employée en théorie des ensembles : le *raisonnement élément par élément*. Nous avons montré qu'un élément x qui vérifie une certaine propriété (celle d'appartenir à $\complement A \cap B)$ compte tenu des hypothèses, en vérifie une autre (celle d'appartenir à $\complement A \cup \complement B$). D'après la définition de l'inclusion, nous en avons déduit que :

$$\complement A \cap B \subset \complement A \cup \complement B.$$

—Pour démontrer la seconde formule, nous pourrions faire maintenant un *raisonnement global*, directement sur les ensembles, en utilisant la première formule et le fait que $\complement(\complement A) = A$.

—Les formules de de Morgan se généralisent de la façon suivante ; soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des sous-ensembles d'un même ensemble E ; alors :

$$\complement_E(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \complement_E A_i,$$

$$\complement_E(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \complement_E A_i.$$

3. Diagrammes de Carroll. — Ils doivent leur nom à Lewis Carroll (de son vrai nom G. Dogson), auteur de *Alice au pays des Merveilles* et d'un ouvrage d'initiation à la logique (voir la bibliographie). Le principe de ces diagrammes est le suivant : On représente le référentiel E par un rectangle et un sous-ensemble A de E par une « bande verticale ou horizontale ». Ceci met en évidence le complémentaire de A (fig. 16 *a*). Sur la figure 16 *b*, $A \cup B$ est la partie hachurée au moins une fois

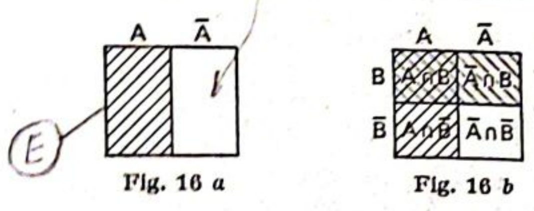


Fig. 16 *a* Fig. 16 *b*

et $A \cap B$ celle hachurée deux fois. Sur cette figure, on constate facilement que $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$: c'est le rectangle non hachuré.

—Le rôle « symétrique » joué par A et son complémentaire peut être mis à profit lors de l'étude naïve de la logique des attributs.

—La figure 17 indique comment représenter trois sous-ensembles A, B, C d'un ensemble E à l'aide de ce type de diagrammes. La figure 18 présente une variante : *diagramme de Karnaugh* ou *de Veitch-Karnaugh* qui offre plus de clarté lorsque le nombre de sous-ensembles considérés est supérieur ou égal à 3.

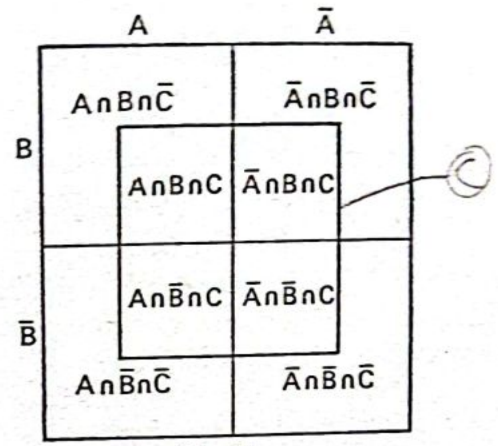


Fig. 17
Le carré central représente l'ensemble C

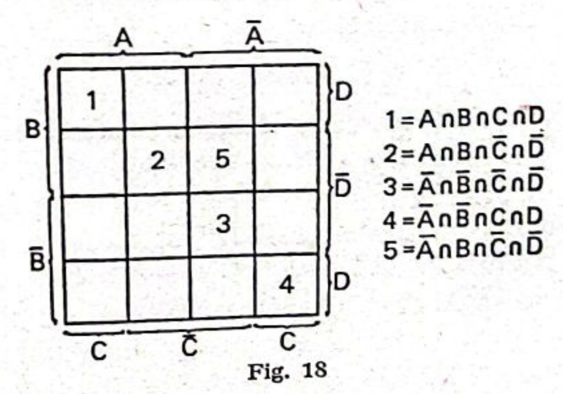


Fig. 18

4. Différence de deux ensembles. — Etant donné deux ensembles A et B, on appelle *différence de A par B* l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On le note $A - B$ ou $A \backslash B$.

—Exemple : si

$$A = \{a, \triangle, 2, \alpha, x, \square\} \quad \text{et} \quad B = \{\alpha, \bigcirc, a, \sqsubset\!\sqsupset, y\}$$

alors :

$$A - B = \{\triangle, 2, x, \square\} \quad \text{et} \quad B - A = \{\bigcirc, \sqsubset\!\sqsupset, y\}.$$

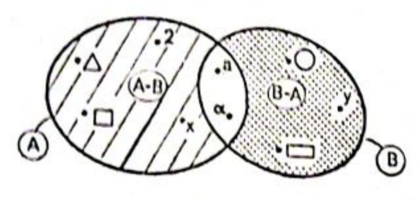


Fig. 19 *a*

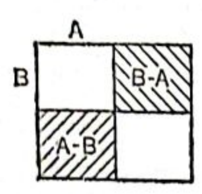


Fig. 19 *b*

Cet exemple fait apparaître qu'en général la différence entre ensembles *n'est pas commutative.*

—En compréhension, la différence de A par B est définie par :

$$A - B = \{x\,;\ x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\}.$$

—Etant donné un ensemble de nombres E, on note souvent E^* l'ensemble $E - \{0\}$; ainsi :

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

—Les définitions du complémentaire de A par rapport à B et de $A - B$ se ressemblent. En fait, $\complement_B A$ n'est défini que *si A est un sous-ensemble de* B, tandis que l'ensemble $A - B$ est *toujours défini.* Sur la figure 19 *a*, $A - B$ et $B - A$ sont définis alors que $\complement_B A$ et $\complement_A B$ n'ont de sens ni l'un ni l'autre. Toutefois, si A est un sous-ensemble de B alors, d'après les définitions, $\complement_B A = B - A$.

Remarques. — 1) $A - B$ est toujours un sous-ensemble de A.

2) On peut définir l'ensemble vide $\varnothing$ par : $\varnothing = E - E$; cette définition a un sens car il est possible de montrer qu'elle est indépendante de l'ensemble E choisi.

—Comparons la différence entre ensembles et la différence entre nombres (dans **Z** par exemple) afin de dégager certaines ressemblances et certaines dissemblances.

—1) De même que dans **Z** on a $x - 0 = x$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$, pour tout ensemble A, on a :

$$A - \varnothing = A.$$

—2) Dans **Z** on a $(x - y = 0) \Leftrightarrow (x = y)$; entre ensembles il n'en est pas de même, puisque :

$$(A - B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset B).$$

Par exemple, prenons :

$$A = \{\alpha, b\} \quad \text{et} \quad B = \{a, \alpha, b\}.$$

Alors : $A - B = \varnothing$ et $A \subsetneq B$.

IV. — Ensemble des parties d'un ensemble

1. **Présentation.** — Pour éviter certaines contradictions ou « paradoxes », nous avons exclu de parler de l'ensemble de *tous* les ensembles. Mais il n'est pas interdit de considérer un ensemble formé de *certains* ensembles. Par exemple, en géométrie, une droite D est un ensemble de points et l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites d'un plan P constitue bien un ensemble d'ensembles.

—Il faut prendre soin aux notations ; étant donné un point m du plan P et une droite D passant par m, on doit écrire :

$$m \in P\,; \quad m \in D\,; \quad D \subset P\,; \quad D \in \mathscr{D}.$$

—Il serait incorrect de noter $D \in P$ car D est une *partie* du plan P et non pas un élément de ce dernier.

—Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et dressons la liste des sous-ensembles de E. On en trouve huit :

$$\varnothing\,;\ \{a\}\,;\ \{b\}\,;\ \{c\}\,;\ \{a, b\}$$
$$\{a, c\}\,;\ \{b, c\}\,;\ \{a, b, c\}.$$

L'ensemble formé de ces huit ensembles est appelé l'*ensemble des parties de E*.

De façon plus générale, nous admettrons que, si E est un ensemble quelconque, les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé *ensemble des parties de E* ; on le note $\mathfrak{P}(E)$ (on lit « P de E »).

Sur l'exemple précédent :

$$\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

En compréhension l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E est défini par :

$$\mathfrak{P}(E) = \{X ;\ X \subset E\}.$$

Il est bon de remarquer l'équivalence suivante :

$$(X \in \mathfrak{P}(E)) \Leftrightarrow (X \subset E).$$

L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E contient deux éléments remarquables, l'ensemble vide $\varnothing$ et E :

$$\varnothing \in \mathfrak{P}(E) \quad \text{et} \quad E \in \mathfrak{P}(E).$$

Remarque. — Puisque $\varnothing \in \mathfrak{P}(E)$, l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ n'est jamais vide :

$$\mathfrak{P}(E) \neq \varnothing.$$

Ceci reste vrai en particulier si E est l'ensemble vide : $\mathfrak{P}(\varnothing) \neq \varnothing$. Dans ce cas, l'ensemble vide est le seul sous-ensemble de $E = \varnothing$; on a donc :

$$\mathfrak{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

On peut refaire avec $\mathfrak{P}(E)$ le raisonnement que nous avons tenu avec E, c'est-à-dire considérer l'ensemble des parties de $\mathfrak{P}(E)$, que l'on note $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$; puis, on peut étudier $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))$ et ainsi de suite. Par exemple, prenons $E = \{a\}$, on a :

$$\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}\}, \quad \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\varnothing, \{a\}\}\} ;$$

l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))$ est formé de huit éléments, etc.

2. Structures sur $\mathfrak{P}(E)$. — En attendant d'en donner une définition plus précise, nous appellerons ***loi de composition*** dans un ensemble E un « procédé » qui permet d'associer à deux éléments x et y de E un troisième élément z de E. Exemples : l'addition ou la multiplication dans $\mathbf{N}$. On peut schématiser ceci de la façon ci-dessous. Nous connaissons trois lois de composition interne dans $\mathfrak{P}(E)$: l'intersection, la réunion et la différence :

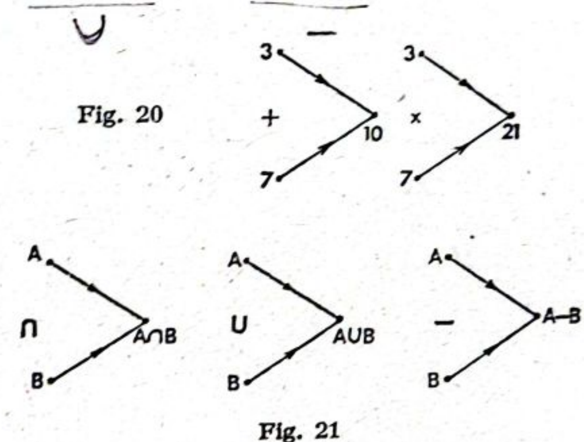


Fig. 20

Fig. 21

Nous savons que la réunion et l'intersection sont associatives et commutatives ; elles possèdent, l'une et l'autre, un élément neutre et un élément zéro.

Intersection	Propriétés	Réunion
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associativité	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap B = B \cap A$	Commutativité	$A \cup B = B \cup A$
$A \cap A = A$	Idempotence	$A \cup A = A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivité	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (A \cup B) = A$	Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$
E car $E \cap A = A \cap E = A$	Neutre	$\varnothing$ car $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
$\varnothing$ car $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$	Zéro	E car $A \cup E = E \cup A = E$
$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$	Lois de de Morgan	$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

— On peut introduire dans $\mathfrak{P}(E)$ une autre loi de composition : On appelle *différence symétrique de A et B*, l'ensemble noté $A \triangle B$ défini par :

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

— L'ensemble $A \triangle B$ est donc formé des éléments appartenant à *A ou à B et seulement à l'un d'eux.*

— Exemple : si

$$A = \{a, d, b, x, u\} \quad \text{et} \quad B = \{c, d, b, y\}.$$

Alors : $\qquad A \triangle B = \{a, x, c, u, y\}.$

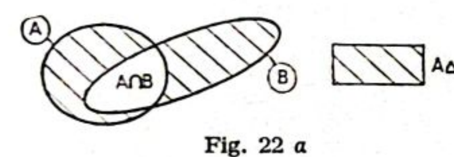


Fig. 22 *a*

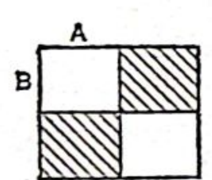


Fig. 22 *b*
A △ B en hachuré

— On voit que la différence symétrique s'exprime par un « ou » *exclusif* tandis que (nous l'avons fait remarquer) le « ou » de la réunion est *non exclusif.* On a toujours $A \triangle B \subset A \cup B$; sur l'exemple précédent cette inclusion est stricte.

— On peut vérifier que la différence symétrique jouit des propriétés suivantes :

1) Elle est associative : $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
2) Elle admet $\varnothing$ pour élément neutre : $A \triangle \varnothing = A$.
3) Tout ensemble est son propre symétrique :

$$A \triangle A = \varnothing.$$

4) Elle est commutative : $A \triangle B = B \triangle A$.

— On résume ces quatre propriétés en disant que la différence symétrique est une *loi de groupe commutatif sur* $\mathfrak{P}(E)$ [ou encore que $\mathfrak{P}(E)$ muni de cette loi est un *groupe commutatif.*]

Chapitre II

RELATIONS

• Le concept de relation unifie trois notions fondamentales en mathématiques :

— la notion de fonctions multiformes (comme le logarithme complexe) ; nous ne l'abordons pas dans cet ouvrage ;
— la notion de relations binaires dans un ensemble (préordres, ordres et équivalences) ; le chapitre III lui est consacrée ;
— la notion de fonctions ou d'applications, développée au chapitre IV.

• Parce que très général, ce concept possède peu de propriétés remarquables ; le lecteur constatera que ce chapitre fournit surtout un *langage* commode pour la suite ; les notions importantes (c.à.d. pourvues de propriétés non triviales et utilisées dans les différents domaines des mathématiques) sont celles d'ordre, d'équivalence et de fonction.

I. — Produit cartésien de deux ensembles

1. Notion de couple. — Nous avons appelé paire tout ensemble formé de deux éléments distincts. Etant donné une paire E constituée des éléments x et y, puisque

$$E = \{x, y\} = \{y, x\},$$

l'expression « le premier élément » de cette paire est dépourvue de sens. Afin de lui en donner un, nous allons utiliser un nouvel objet mathématique qui pourrait s'appeler une *paire ordonnée* et que l'on nomme un *couple*. Le *couple* formé des éléments x et y pris dans cet ordre se note (x, y), ce qui se lit « couple x, y ». L'élément x est appelé le *premier terme* du couple (x, y) et y le *second terme* de ce couple. De plus, nous convenons que *deux couples sont égaux* si, et seulement si leurs termes correspondants sont égaux :

$$(x, y) = (u, v) \quad \text{équivaut à} \quad x = u \quad \text{et} \quad y = v.$$

On a ainsi $(3,5) \neq (3,8)$ et $(4,5) \neq (5,4)$.

A partir de la paire $\{x, y\}$, on peut construire deux couples distincts (x, y) et (y, x). D'autre part, il est légitime de considérer des couples de la forme (x, x) alors que $\{x, x\}$ n'est pas une paire mais le singleton $\{x\}$.

Remarque. — Ce qui précède ne constitue pas une définition mathématique de la notion de couple, mais une présentation accompagnée d'une règle de fonctionnement. Il est possible de définir *formellement* la notion de couple, par exemple en posant :

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Cette définition, due à Wiener (1914), entraîne que (x, y) est distinct de (y, x) dès que x est distinct de y et deux couples sont égaux si et seulement si leurs termes respectifs sont égaux.

2. **Produit cartésien.** — Soient deux ensembles $E = \{a, b, c, \ldots\}$ et $F = \{a', b', c', \ldots\}$. Considérons tous les couples que nous pouvons former en prenant pour premier terme un élément quelconque de E, et pour second terme un élément quelconque de F :

$$(a, a'), (a, b'), (a, c'), \ldots, (b, a'), (b, b'), \ldots, (c, a'), (c, b'), \ldots$$

Admettons que ces couples forment un ensemble ; on lui donne le nom de *produit cartésien des ensembles E et F*. Il se note $E \times F$, ce qui se lit « E croix F ».

Par exemple, soient $E = \{b, d, e\}$ et $F = \{2, 8\}$; alors :

$$E \times F = \{(b, 2), (b, 8), (d, 2), (d, 8), (e, 2), (e, 8)\},$$
$$F \times E = \{(2, b), (8, b), (2, d), (8, d), (2, e), (8, e)\}.$$

Cet exemple montre qu'en général $E \times F$ est différent de $F \times E$; on dit que le *produit cartésien* n'est pas commutatif.

En compréhension, $E \times F$ est défini par :

$$E \times F = \{(x, y) ; \quad x \in E \quad \text{et} \quad y \in F\}.$$

On remarque que si (x, y) est un élément de $E \times F$, alors (y, x) est un élément de $F \times E$ et réciproquement :

$$((x, y) \in E \times F) \Leftrightarrow ((y, x) \in F \times E).$$

Cas particuliers. — 1) Si l'on prend $E = F$, le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 (on lit « E deux »). Exemple : si $E = \{a, b, c\}$, alors :

$$E^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

2) Dans l'ensemble E^2, considérons le sous-ensemble noté $\Delta(E)$, formé des couples dont les deux composantes sont égales :

$$\Delta(E) = \{(a, a), (b, b), (c, c), \ldots\}.$$

On appelle cet ensemble la *diagonale de E*.

Pour symboliser le produit cartésien de deux ensembles E et F, on utilise deux types de figures. Suivant les cas, nous verrons que l'un est plus

figuratif que l'autre. Nous allons introduire ces deux modes de représentation graphique du produit cartésien $E \times F$, en donnant successivement le principe et un exemple (nous prendrons $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{u, v\}$).

1) *Diagramme cartésien* : On représente chaque ensemble E et F par des points alignés (points isolés, segments ou droites). Le couple (x, y) est symbolisé, comme en géométrie analytique, par le point du « plan » de « coordonnées » x et y (fig. 23).

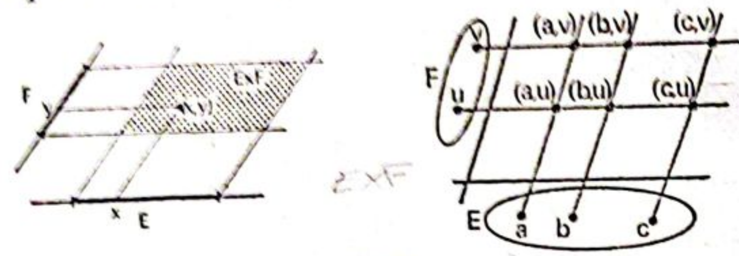


Fig. 23

2) *Tableau cartésien* : On dresse un tableau à double entrée ; sur la ligne supérieure sont portés les éléments de F et sur la première colonne à gauche les éléments de E. Dans chaque case du tableau, on écrit le couple ayant pour première composante l'élément de E figurant sur la même ligne, et pour seconde composante l'élément de F se trouvant dans la même colonne.

E \ F	a'	b'	c'	…	e'	…
a	a,a'	a,b'	a,c'	…	a,e'	
b	b,a'	b,b'	b,c'		b,e'	
c	c,a'					
⋮	⋮					
e	e,a'				e,e'	

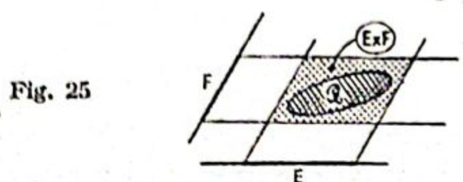
E \ F	u	v
a	(a,u)	(a,v)
b	(b,u)	(b,v)
c	(c,u)	(c,v)

Fig. 24

II. — Relations d'un ensemble vers un autre

1. **Définitions.** — Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle *graphe*, *relation* ou *correspondance de* E *vers* F tout sous-ensemble $\mathscr{R}$ du produit cartésien $E \times F$. Une relation est donc un ensemble de couples.

Fig. 25



Exemples : soient $E = \{u, v, w\}$ et $F = \{a, b\}$; alors :

$$\mathscr{R}_1 = \{(u, a), (w, b)\} ; \quad \mathscr{R}_2 = E \times F ; \quad \mathscr{R}_3 = \{(v, a), (v, b), (w, b)\}$$

$$\mathscr{R}_4 = \varnothing \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_5 = \{(u, b), (v, b), (w, b)\}$$

sont des relations de E vers F.

Soit $\mathscr{R}$ une relation de E vers F ; l'ensemble E est appelé la *source* et l'ensemble F le *but* de la relation $\mathscr{R}$. Soit $(x, y) \in \mathscr{R}$; l'élément x est dit un antécédent de y, et y est dit une *image* de x par $\mathscr{R}$.

Au lieu de $(x, y) \in \mathscr{R}$, on écrit souvent $x \mathscr{R} y$.

$$((x, y) \in \mathscr{R}) \Leftrightarrow (x \mathscr{R} y).$$

En pratique, lorsqu'on écrit $x \mathscr{R} y$, $\mathscr{R}$ remplace une expression comme « divise » ou « est perpendiculaire à », etc.

Remarque. — Selon le point de vue adopté ici, deux ensembles ayant été choisis, on appelle relation toute partie de leur produit cartésien. Dans les ouvrages plus théoriques, on définit une relation,

ou *une correspondance* $\mathcal{R}$, par la donnée simultanée de trois objets mathématiques :

— un ensemble E dit *source* de $\mathcal{R}$;
— un ensemble F dit *but* de $\mathcal{R}$;
— une partie G de $E \times F$ dite *graphe* de $\mathcal{R}$.

—Lorsque les ensembles E et F sont donnés, la connaissance du graphe détermine la relation et réciproquement. Il en sera ainsi dans tous les cas que nous rencontrerons. C'est pourquoi, dans le but de simplifier l'exposé, nous avons identifié les relations à leur graphe. De la sorte, l'ensemble des relations de E vers F est l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times F)$ des sous-ensembles de $E \times F$.
—A titre d'exemples, nous donnons maintenant une liste de relations que l'on rencontre fréquemment en mathématique en ne précisant ni leur source, ni leur but :

— l'égalité $=$ et l'inégalité $\neq$;
— l'appartenance $\in$ et la non appartenance $\notin$;
— l'inclusion large $\subset$ et l'inclusion stricte $\subsetneq$;
— le parallélisme $||$, l'équipollence $\upuparrows$, et la perpendicularité $\perp$;
— l'inégalité large $\leqslant$ et l'inégalité stricte $<$;
— la divisibilité $|$.

—Puisqu'une relation d'un ensemble vers un autre est une partie du produit cartésien de ces deux ensembles, nous pouvons la symboliser en utilisant les deux types de dessins, introduits au début de ce chapitre, pour représenter le produit cartésien de deux ensembles. En fait, on utilise plutôt un troisième type de figure : on dessine face à face les diagrammes de Venn des ensembles E et F, et l'on relie par une flèche chaque élément de E aux éléments de F, avec lesquels il est en relation.

Une telle figure porte le nom de *diagramme sagittal* de la relation considérée.
—Nous donnons ci-dessous un exemple de relation et les trois types de représentation évoqués.
—Soient :

$$E = \{-2, 0, 5, +1, -1\}, \quad F = \{-1, 4, 2, 0\}$$

et $\mathcal{R}$ la relation définie par :

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + y \leqslant 1.$$

— Alors : $\mathcal{R} = \{(-2, -1), (-2, 3), (-2, 0), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (2, -1)\}$.

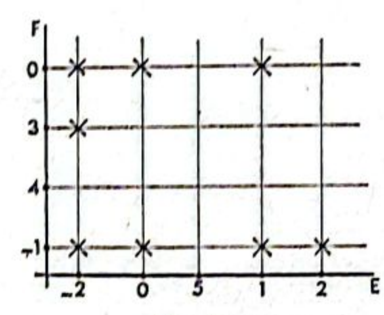


Fig. 25 *a*

E \ F	-1	4	3	0
-2	(-2,-1)		(-2,3)	(-2,0)
0	(0,-1)			(0,0)
5				
1	(1,-1)			(1,0)
2	(2,-1)			

Fig. 25 *b*

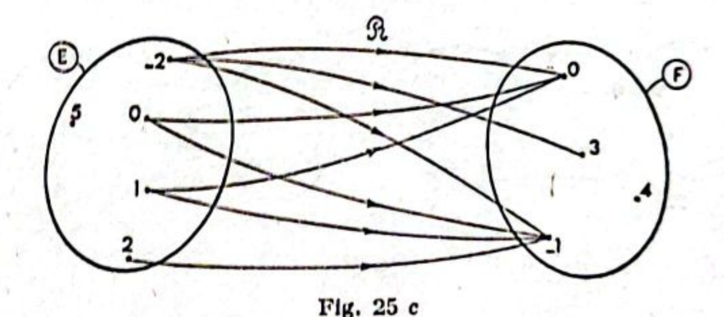


Fig. 25 c

2. **Composition des relations.** — Considérons une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F et une relation $\mathcal{S}$ de l'ensemble F vers un ensem-

ble G. Supposons qu'un élément x de E admette une image $y \in F$ par $\mathcal{R}$ et que y possède lui-même une image $z \in G$ par $\mathcal{S}$. Le couple (x, z) est un élément de $E \times G$. L'ensemble des éléments de

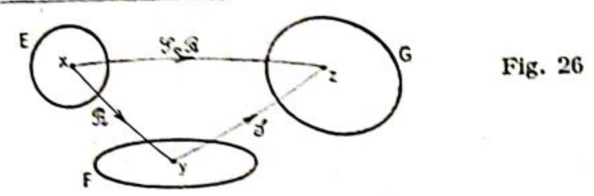


Fig. 26

$E \times G$ obtenu de la sorte est donc une relation de E vers G. On l'appelle *relation composée des relations* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$. Elle se note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ (ce qui se lit « $\mathcal{S}$ rond $\mathcal{R}$ »).

— On dit que $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ *est la relation composée de* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{S}$ *pris dans cet ordre* :

— Etant donnés les ensembles $E = \{1, 3, 4\}$, $F = \{2, 3, 5\}$, $G = \{3, 8, 6, 11\}$, soit $\mathcal{R}$ la relation définie par : $x \mathcal{R} y$ si, et seulement si, $x + y > 5$; soit $\mathcal{S}$ la relation de divisibilité de F vers G. La relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est symbolisée sur la figure ci-dessous :

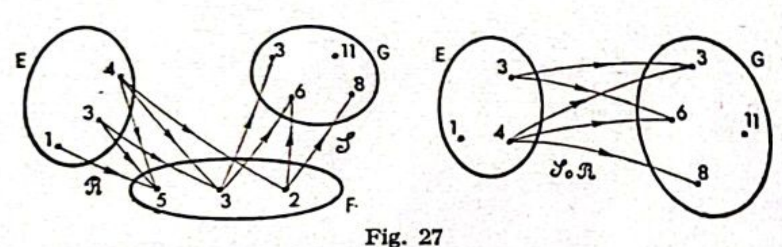


Fig. 27

— En compréhension, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est défini par :

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) ; \text{ il existe } y, (x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{S}\}.$$

— On peut composer deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ dans cet ordre *si, et seulement si, le but de* $\mathcal{R}$ *est égal à la source de* $\mathcal{S}$. Par conséquent, *en général deux relations quelconques ne sont pas composables.*

— Si deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont composables dans cet ordre, par contre, les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas nécessairement composables. C'est le cas du second exemple traité ci-dessus.

— Si $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ existent, ces deux relations ne sont pas nécessairement égales. Nous verrons plusieurs exemples lors de l'étude des fonctions.

— Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations *composables dans cet ordre*, on a :

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}.$$

3. **Relations réciproques.** — En arithmétique, étant donnés deux entiers strictement positifs n et m, on écrit $n \equiv 0 \pmod m$ — ce qui se lit « n congru à zéro modulo m » — pour exprimer que m divise n ou, de manière équivalente, que n est un multiple de m. On a donc :

$$m \mid n \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod m \Leftrightarrow \text{« } n \text{ multiple de } m \text{ ».}$$

— Ceci exprime que les relations « divise » et « est multiple de » sont réciproques l'une de l'autre.

— D'une façon plus générale, soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F ; considérons la relation notée $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ (on lit : « $\mathcal{R}$ moins un ») définie de F vers E par :

$$x \overset{-1}{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x.$$

La relation $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ est appelée *relation réciproque* de la relation $\mathcal{R}$; c'est une relation de F vers E.

— Exemple :

soient $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $F = \{3, 7, 9, 10, 12\}$.

— Soient $\mathcal{R}$ la relation de divisibilité de E vers F et $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ la relation « est multiple de », de F vers E. Les

diagrammes sagittaux de ces relations sont représentés sur la figure 28.

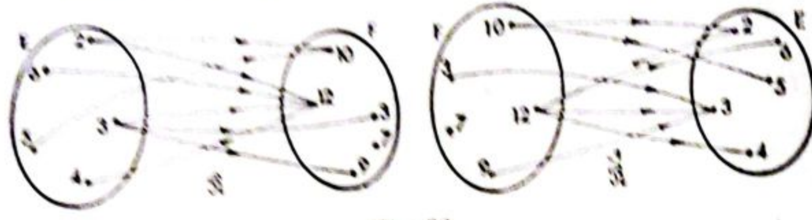


Fig. 28

Les propriétés immédiates des relations réciproques sont les suivantes :

1) $(\overset{-1}{\mathscr{R}})^{-1} = \mathscr{R}$ car par définition :

$$(x, y) \in (\overset{-1}{\mathscr{R}})^{-1} \quad \text{équivaut à} \quad (y, x) \in \overset{-1}{\mathscr{R}}.$$

2) Si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont deux relations composables dans cet ordre, alors $\overset{-1}{\mathscr{S}}$ et $\overset{-1}{\mathscr{R}}$ sont composables et l'on a :

$$(\mathscr{S} \circ \mathscr{R})^{-1} = \overset{-1}{\mathscr{R}} \circ \overset{-1}{\mathscr{S}}.$$

Il est important de noter l'ordre dans lequel on compose les relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ d'une part, $\overset{-1}{\mathscr{S}}$ et $\overset{-1}{\mathscr{R}}$ d'autre part.

4. Image d'un ensemble par une relation. — Soit $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F, et soit A une partie de E. Il se peut que des éléments de F soient atteints par une, plusieurs ou aucune flèche partant de A ; sur la figure 29 :

— α n'est atteint par aucune flèche partant de A ;
— β est atteint par une flèche (partant de $a \in A$) ;
— γ est atteint par deux flèches (l'une partant de $e \in A$, l'autre partant de $c \in A$).

L'ensemble des éléments de F auxquels aboutit *au moins* une flèche partant de A est appelé l'*image directe (ou image) de A par la relation $\mathscr{R}$*. On note $\mathscr{R}(A)$ cet ensemble (on lit « $\mathscr{R}$ de A »). Sur cet exemple, on a :

$$\mathscr{R}(A) = \{\beta, \varepsilon, \gamma\}.$$

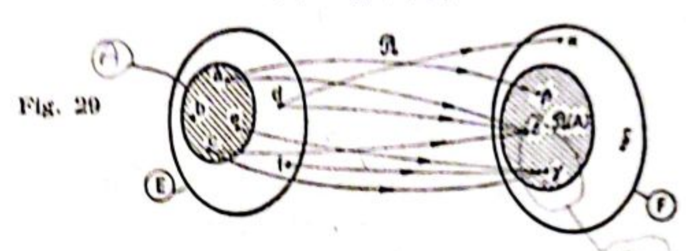


Fig. 29

En compréhension, $\mathscr{R}(A)$ est défini par :

$$\mathscr{R}(A) = \{y\ ;\ y \in F \ \text{ tels qu'il existe } \ x \in A,\ (x, y) \in \mathscr{R}\}\ ;$$

C'est un sous-ensemble de F.

Notation. — Lorsque A est un singleton, $A = \{a\}$, et s'il n'y a aucun risque possible de confusion, selon l'usage, on écrit $\mathscr{R}(a)$ au lieu de $\mathscr{R}(\{a\})$.

Soient $\mathscr{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F et A, B deux sous-ensembles de E ; on peut vérifier que $A \subset B$ entraîne $\mathscr{R}(A) \subset \mathscr{R}(B)$. On dit qu'*une relation préserve l'inclusion* (fig. 30).

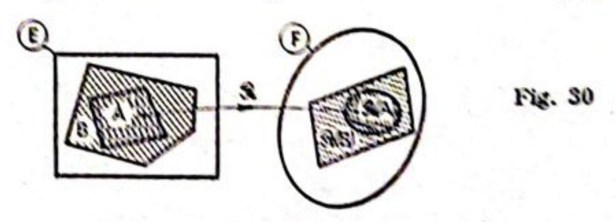


Fig. 30

On dit aussi qu'*une relation préserve la réunion* pour exprimer que : *L'image de la réunion de deux ensembles est la réunion des images*, soit :

$$\mathscr{R}(A \cup B) = \mathscr{R}(A) \cup \mathscr{R}(B).$$

Toutefois, une relation ne préserve pas l'intersection : *l'image de l'intersection de deux ensembles n'est pas nécessairement l'intersection des images.* En règle générale, on a :

$$\mathcal{R}(A \cap B) \subset \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$$

et il se peut, comme nous en donnons un exemple, que $\mathcal{R}(A \cap B)$ soit strictement inclus dans $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$. Prenons :

$$E = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 33\}, \qquad A = \{3, 5, 7\},$$

$$B = \{2, 3, 11\}, \qquad F = \{1, 3, 7, 10, 11, 13, 17\}$$

et soit $\mathcal{R}$ la relation de divisibilité de E vers F. On a alors :

$$A \cap B = \{3\} \qquad \mathcal{R}(A \cap B) = \mathcal{R}(3) = \{3\}.$$

Cependant, on a :

$$\mathcal{R}(A) = \{3, 10, 7\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(B) = \{3, 11, 10\}$$

donc : $$\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{3, 10\}$$

par conséquent :

$$\mathcal{R}(A \cap B) \subsetneq \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B).$$

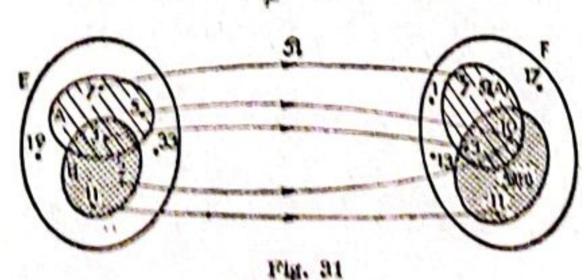


Fig. 31

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble E vers un ensemble F et $x \in E$. Il se peut que de cet élément parte une, aucune ou plusieurs flèches vers F. Sur la figure 29 :

— de e part une flèche $\gamma \in F$;
— de a partent deux flèches vers F : l'une vers β, l'autre vers ε ;
— de b ne part aucune flèche.

Soit B une partie de F, on appelle *image réciproque de B par* $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de E d'où part une flèche allant sur un élément de B : cette image réciproque n'est autre que l'image directe de B par la relation $\overset{-1}{\mathcal{R}}$. Pour cette raison, on la note $\overset{-1}{\mathcal{R}}(B)$.

Exemple : Sur la figure 29, soit $B = \{\varepsilon, \gamma\}$, alors :

$$\overset{-1}{\mathcal{R}}(B) = \{a, e, c, d, f\},$$

$$\overset{-1}{\mathcal{R}}(\{\gamma\}) = \{e, c, f\} \quad \text{et} \quad \overset{-1}{\mathcal{R}}(\{\delta\}) = \varnothing.$$

Comme pour l'image directe, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, en pratique, on écrit $\overset{-1}{\mathcal{R}}(\alpha)$ au lieu de $\overset{-1}{\mathcal{R}}(\{\alpha\})$; sur l'exemple précédent : $\overset{-1}{\mathcal{R}}(\gamma) = \{e, c, f\}$.

$y \in \mathcal{R}(x)$ équivaut à $x \in \overset{-1}{\mathcal{R}}(y)$.

Considérons une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F. En général l'image de E par $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de F; on l'appelle *l'image de E par* $\mathcal{R}$. De la même façon l'image réciproque de F par $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de E ; on l'appelle le *domaine d'existence* de $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{R}(E) \subset F \quad \text{et} \quad \overset{-1}{\mathcal{R}}(F) \subset E.$$

Sur la figure 29, on a :

$$\mathcal{R}(E) = \{\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma\} \quad \text{et} \quad \overset{-1}{\mathcal{R}}(F) = \{a, d, c, e, f\}.$$

III. — Relation binaire dans un ensemble

1. **Généralités.** — On appelle *relation binaire dans un ensemble E* ou *relation dans E*, toute relation de E vers E.

Parmi les relations énumérées précédemment citons celles qui sont des relations binaires dans un ensemble (sans préciser explicitement sur quel ensemble) : $=$; $\neq$; $\subset$; $\subsetneq$; $\parallel$; $\uparrow\uparrow$; $\perp$; $\leqslant$; $<$; $|$.

Par définition, dire que $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans un ensemble E, c'est dire (avec l'abus de langage déjà signalé pour les relations d'un ensemble vers un autre) que $\mathscr{R}$ est une partie de $E \times E$, et réciproquement. L'ensemble des relations binaires dans E est donc $\mathfrak{P}(E \times E)$.

On remarque (fig. 32) que la diagonale de E, notée $\Delta(E)$, n'est autre que la relation d'égalité dans E :

$$((x, y) \in \Delta(E)) \Leftrightarrow (x = y).$$

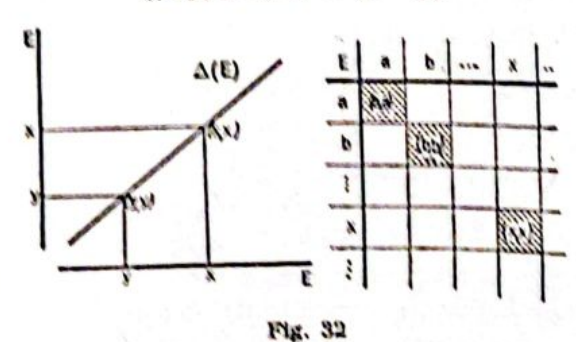
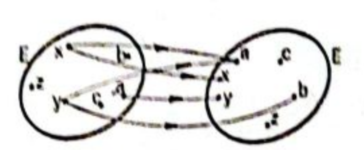


Fig. 32

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans un ensemble E ; sa relation réciproque $\overset{-1}{\mathscr{R}}$ est une relation de E vers E, donc une relation binaire dans E. Par exemple la divisibilité est une relation binaire dans

N dont la relation réciproque « est multiple de » est aussi une relation binaire dans **N**.

On vérifie aisément que la relation réciproque de la diagonale (i.e. de l'égalité) est la diagonale elle-même. La relation réciproque de la relation $\geqslant$ (dans **R** par exemple), est la relation $\leqslant$. Lorsque l'on dessine le diagramme sagittal d'une relation dans un ensemble, il est d'usage de ne symboliser cet ensemble qu'une fois au lieu de deux (fig. 33).



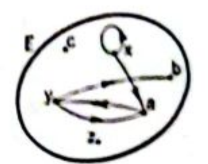


Fig. 33

Sur la figure 34 sont représentées quatre situations particulières ; pour des raisons pédagogiques, il arrive qu'on leur réserve une terminologie propre dans l'enseignement secondaire.

élément bouclé — paire inerte — paire unilatérale — paire boomerang

Fig. 34

2. **Relations réflexives.** — Considérons dans **N** les relations $|$ et $<$. Il est clair que tout entier x se divise lui-même. Pour tout $x \in \mathbf{N}$, on peut écrire : $x \mid x$. Par contre, on n'a pas $x < x$.

On introduit la définition suivante : une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est dite *réflexive*, si pour *tout* élément x de E on a :

$$x \mathscr{R} x.$$

— Le tableau ci-dessous dresse la liste des relations réflexives parmi celles citées au début de ce chapitre.

Réflexives	$= ; \subset ; \leqslant ; \parallel ; \upuparrows ; \mid$.
Non réflexives	$\neq ; \subsetneq ; < ; \perp$.

— Dire que $\mathscr{R}$ est réflexive équivaut à dire que $\Delta(E) \subset \mathscr{R}$.

3. **Relations symétriques.** — Considérons dans **N** les relations $\mathscr{P}$: « a même parité » et $|$. Si x a même parité que y, alors y a même parité que x ; on écrit :

$$(x \mathscr{P} y) \Rightarrow (y \mathscr{P} x).$$

— Mais si x divise y, l'élément y ne divise pas nécessairement x.

— Une relation binaire $\mathscr{R}$ dans un ensemble E est dite *symétrique* si elle vérifie :

$$(x \mathscr{R} y) \Rightarrow (y \mathscr{R} x).$$

— Exemples :

Symétriques	$= ; \neq ; \parallel ; \perp ; \upuparrows$.
Non symétriques	$\subset ; \subsetneq ; \leqslant ; < ; \mid$.

— Une relation $\mathscr{R}$ est symétrique si, et seulement si, $\mathscr{R} = \overset{-1}{\mathscr{R}}$.

— Vérifions par exemple que si $\mathscr{R}$ est symétrique alors $\mathscr{R} = \overset{-1}{\mathscr{R}}$. Si $(x, y) \in \mathscr{R}$, et si $\mathscr{R}$ est symétrique, alors $(y, x) \in \mathscr{R}$, donc $(x, y) \in \overset{-1}{\mathscr{R}}$, ce qui prouve

que $\mathscr{R} \subset \overset{-1}{\mathscr{R}}$. Alors $\overset{-1}{\mathscr{R}} \subset (\overset{-1}{\mathscr{R}})^{-1} = \mathscr{R}$. On a donc $\overset{-1}{\mathscr{R}} \subset \mathscr{R}$ et $\mathscr{R} \subset \overset{-1}{\mathscr{R}}$, ce qui entraîne $\mathscr{R} = \overset{-1}{\mathscr{R}}$.

— Que ce soit sur un tableau ou un diagramme cartésien, on constate que si $\mathscr{R}$ est une relation symétrique, tout élément de son graphe admet un « symétrique » par rapport à la diagonale $\Delta(E)$.

4. **Relations antisymétriques.** — Considérons à nouveau dans **N** les relations $\mathscr{P}$ et $|$. Si x divise y et si y divise x, alors $x = y$. En effet, $xa = y$ et $yb = x$ entraînent $x = xab$; donc $x = 0$ (et $y = 0$) ou $a = b = 1$ et $x = y$. On écrit :

$$(x \mid y \quad \text{et} \quad y \mid x) \Rightarrow (x = y).$$

— Par contre, il est possible que deux éléments distincts x et y vérifient simultanément $x \mathscr{P} y$ et $y \mathscr{P} x$, c'est-à-dire aient même parité. Par exemple, on a :

$$2 \neq 4 \quad \text{avec} \quad 2 \mathscr{P} 4 \quad \text{et} \quad 4 \mathscr{P} 2.$$

— Par définition, on dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ dans un ensemble E est *antisymétrique* si elle vérifie :

$$(x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x) \Rightarrow (x = y).$$

— Exemples :

Antisymétriques	$= ; \subset ; \subsetneq ; \leqslant ; < ; \mid$.
Non antisymétriques	$\neq ; \parallel ; \perp ; \upuparrows$.

Remarques. — 1) Une relation binaire dans E peut être à la fois symétrique et antisymétrique. C'est le cas de l'égalité.

2) Une relation binaire dans E peut être ni symétrique, ni antisymétrique. Exemple : la divisibilité dans **Z** où, par exemple, — 4 et 4 se divisent

mutuellement sans être égaux ; cette relation n'est par antisymétrique. Elle n'est pas non plus symétrique : 2 divise 6, mais 6 ne divise pas 2.

—La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique si, et seulement si, $\mathcal{R} \cap \overset{-1}{\mathcal{R}} \subset \mathcal{E}$, c'est-à-dire si les graphes de $\mathcal{R}$ et de $\overset{-1}{\mathcal{R}}$ sont ou bien disjoints, ou bien avec des éléments communs appartenant nécessairement à la diagonale (fig. 35).

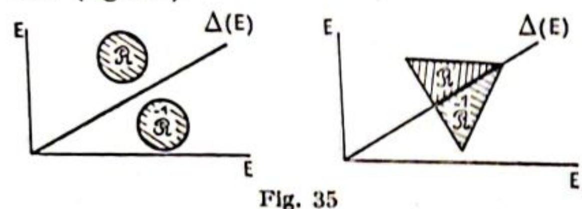


Fig. 35

—On distingue donc deux sortes de relations antisymétriques :

a) celles qui ne vérifient jamais simultanément $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$; exemples : $<$ et $\subsetneq$;

b) celles où, éventuellement, on peut avoir $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$, mais à la condition que $x = y$; exemples : $\leqslant$ et $\subset$.

5. **Relations transitives.** — Considérons les relations | dans N et ⊥ dans l'ensemble des droites du plan. Si x divise y et si y divise z, alors x divise z. On écrit :

$$(x \mid y \quad \text{et} \quad y \mid z) \Rightarrow (x \mid z).$$

—Par contre (fig. 36), on a $x \perp y$ et $y \perp z$ sans avoir $x \perp z$.

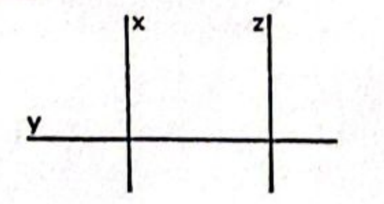


Fig. 36

—Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite *transitive* si elle vérifie :

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z).$$

—Exemples :

Transitives	$=$; $\subset$; $\subsetneq$; $\leqslant$; $<$; $\parallel$; $\uparrow\uparrow$; $\mid$.
Non transitives	$\neq$; $\perp$.

—En utilisant la composition des relations, on constate qu'une relation $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

—Le tableau ci-dessous permet de comparer les quatre propriétés remarquables d'une relation auxquelles nous venons de nous intéresser.

Réflexive	$\Delta(E) \subset \mathcal{R}$.
Symétrique	$\mathcal{R} = \overset{-1}{\mathcal{R}}$.
Antisymétrique	$\mathcal{R} \cap \overset{-1}{\mathcal{R}} \subset \Delta(E)$.
Transitive	$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$.

6. **Algèbre des relations.** — Nous savons que deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont composables dans cet ordre si, et seulement si, le but de $\mathcal{R}$ est égal à la source de $\mathcal{S}$. Par conséquent, *deux relations binaires dans un même ensemble sont toujours composables* ; on définit ainsi une loi de composition dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times E)$ des relations binaires dans E. Elle est associative : $\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T}$; mais en général, elle n'est pas commutative : on peut trouver des relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ telles que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ soit différent de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Deux relations particulières $\emptyset$ et $\Delta(E)$ jouent un rôle remarquable puisque pour toute relation $\mathscr{R}$, on a :

$$\emptyset \circ \mathscr{R} \quad = \mathscr{R} \circ \emptyset = \emptyset,$$

et

$$\Delta(E) \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \Delta(E) = \mathscr{R}.$$

— *Puissances successives d'une relation.* — Une relation binaire $\mathscr{R}$ dans un ensemble E est toujours composable avec elle-même ; on écrit $\mathscr{R}^2$ au lieu de $\mathscr{R} \circ \mathscr{R}$. Sur la figure ci-dessous nous avons symbolisé :

$$(x, z) \in \mathscr{R}^2.$$

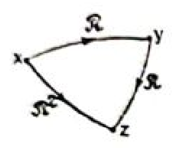


Fig. 37

On constate que cela veut dire qu'il existe $y \in E$ tel que :

$$(x, y) \in \mathscr{R} \quad \text{et} \quad (y, z) \in \mathscr{R}.$$

Par exemple, en géométrie plane, on pourrait écrire :

$$\perp^2 = \perp \circ \perp = || \quad \text{et} \quad ||^2 = || \circ || = ||.$$

Remarquons encore qu'une relation $\mathscr{R}$ est transitive si et seulement si $\mathscr{R}^2 \subset \mathscr{R}$.

— On définit $\mathscr{R}^n$ par récurrence en posant, pour $n \geqslant 3$, $\mathscr{R}^n = \mathscr{R}^{n-1} \circ \mathscr{R}$. On vérifie alors que :

$$\mathscr{R}^n = \mathscr{R}^{n-1} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{R}^{n-1}.$$

Nous ne développerons pas plus ici l'étude de l'algèbre des relations binaires sur un ensemble.

CHAPITRE III

RELATIONS D'ORDRE RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Etant donné un ensemble d'objets mathématiques (des nombres, des points d'un plan, des fonctions, etc.), se pose le problème de pouvoir *comparer* de différentes façons ou *identifier entre eux* certains des éléments de cet ensemble. Cela conduit à l'étude de deux types particuliers de relations dans un ensemble que l'on nomme les relations d'ordre et les relations d'équivalence.

I. — Relations d'ordre

1. Définitions. — On appelle *relation d'ordre* ou *ordre* dans un ensemble E toute relation $\mathscr{R}$ dans E qui est :

— réflexive : $x \mathscr{R} x$;

— transitive : $(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \Rightarrow (x \mathscr{R} z)$;

— antisymétrique : $(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} x) \Rightarrow (x = y)$.

— Exemples : on note $|_{\mathbf{N}}$ et $|_{\mathbf{Z}}$ la divisibilité dans **N** et dans **Z**.

— 1) Les relations $=$; $\subset$; $\leqslant$ et $|_{\mathbf{N}}$ sont des relations d'ordre.

— 2) Les relations $\subsetneq$ et $<$ ne sont pas des relations d'ordre car elles ne sont pas réflexives.

— 3) Les relations $|_{\mathbf{Z}}$; $||$ et $\upuparrows$ ne sont pas des relations d'ordre car elles ne sont pas antisymétriques.

— 4) La relation $\perp$ n'est pas une relation d'ordre ; elle n'est ni transitive ni antisymétrique.

— Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est un ordre si et seulement si :

$$\Delta(E) \subset \mathcal{R} ; \quad \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R} ; \quad \mathcal{R} \cap \overset{-1}{\mathcal{R}} \subset \Delta(E).$$

— Dans un ensemble, il peut exister plusieurs relations d'ordre distinctes ; ainsi, dans **N**, les relations $\leqslant$ et $|_{\mathbf{N}}$.

— Etant donnée une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, le couple $(E, \mathcal{R})$ est appelé *ensemble ordonné par* $\mathcal{R}$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ nous dirons que a et b sont deux *éléments comparables dans cet ordre*, par la relation $\mathcal{R}$ considérée.

— On dit que a et b sont *comparables* si a et b sont comparables dans cet ordre ou si b et a sont comparables dans cet ordre, c'est-à-dire si l'on a $(a, b) \in \mathcal{R}$ ou $(b, a) \in \mathcal{R}$.

— Nous noterons $\prec$ une relation d'ordre et $\succ$ sa relation réciproque ; $a \prec b$ se lit « a précède b » et $a \succ b$ « a suit b ». Les relations $\prec$ et $\succ$ sont dites *relations d'ordre opposées*. Par exemple dans **R**, les ordres usuels $\leqslant$ et $\geqslant$ sont des relations d'ordre opposées.

— En général, dans un ensemble ordonné figurent des éléments incomparables. Exemple : dans l'ensemble ordonné $(\mathbf{N}, |_{\mathbf{N}})$ trois et cinq sont incomparables puisque trois ne divise pas cinq, et que cinq ne divise pas trois.

— Deux éléments d'un ensemble E peuvent être incomparables pour une relation d'ordre et comparables pour une autre. Par exemple dans **N**, trois et cinq sont incomparables pour la relation de divisibilité, mais comparables pour la relation d'ordre naturel $\leqslant$.

— *Remarque.* — Bien qu'elle ne soit pas un ordre, la relation $<$ dans **R** (ou des sous-ensembles de **R**) est dite un *ordre strict*. Il en est de même de $\subsetneq$.

2. Diagramme de Hasse d'une relation d'ordre.

— Pour représenter les relations d'ordre dans un ensemble fini (ou même dénombrable, nous verrons plus loin ce que ce terme signifie), on utilise un type particulier de schémas dont le principe est le suivant : on représente par un point chaque élément de l'ensemble considéré. Lorsque x et y sont deux éléments distincts, comparables dans cet ordre, on dispose y « au-dessus » de x sur le dessin et on relie x à y par une flèche ou un trait. Par exemple, pour la relation de divisibilité dans $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 24\}$, on obtient la figure suivante :

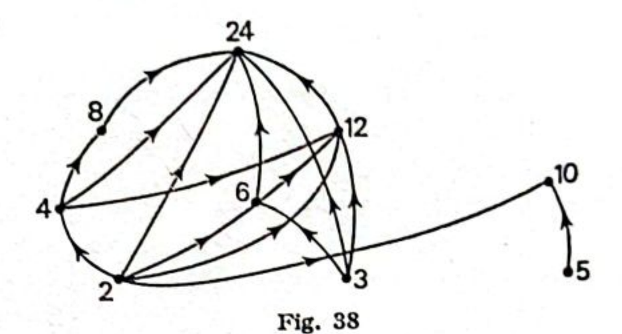
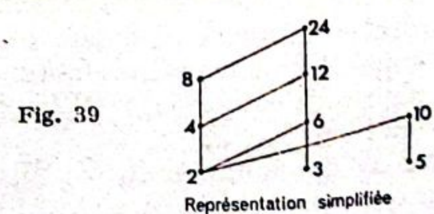


Fig. 38

— Comme une relation d'ordre est transitive, afin de simplifier ce type de représentation, on convient de ne pas faire figurer la flèche allant de x à z lorsque x, y d'une part et y, z d'autre part sont comparables dans cet ordre. On obtient ainsi une représentation plus claire (fig. 39) qui porte le nom de *diagramme de Hasse de la relation d'ordre* étudiée.

Fig. 39



3. **Ordre partiel, ordre total.** — Si dans un ensemble ordonné $(E, \prec)$ il existe au moins deux éléments incomparables (par exemple 6 et 10 sur la figure 39), on dit que E est un *ensemble partiellement ordonné par la relation* $\prec$.

Exemple : En général l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est partiellement ordonné par la relation d'inclusion. En effet, nous savons déjà que l'inclusion est une relation d'ordre ; en considérant $E = \{a, b\}$, on vérifie que :

$$\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, E\}$$

est partiellement ordonné par l'inclusion puisque $\{a\}$ et $\{b\}$ sont incomparables :

$$\{a\} \not\subset \{b\} \quad \text{et} \quad \{b\} \not\subset \{a\}.$$

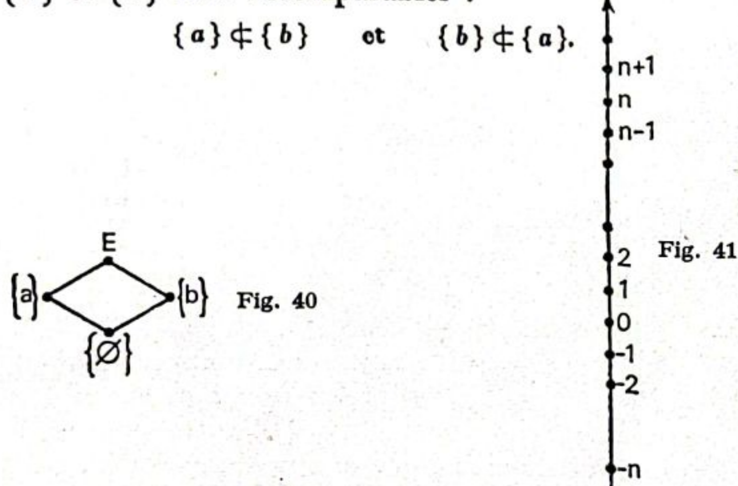


Fig. 40

Fig. 41

Un ensemble E est dit *totalement ordonné* par une relation d'ordre $\prec$ si deux éléments quelconques de E sont comparables par cette relation. En d'autres termes, pour tout couple (a, b) d'éléments de E, on a $a \prec b$ ou bien $b \prec a$.

Les ensembles de nombres **N**, **Z**, **D**, **Q** et **R**, munis de leur ordre usuel, sont totalement ordonnés.

Un ensemble totalement ordonné est encore appelé *une chaîne* en raison de la forme que revêt le diagramme de Hasse d'un tel ensemble (dans le cas fini ou dénombrable). Par exemple, la figure 41 représente le diagramme de Hasse de l'ordre usuel sur **Z**. Tout sous-ensemble d'un ensemble totalement ordonné est lui-même totalement ordonné.

Dans un ensemble partiellement ordonné, il existe des sous-ensembles totalement ordonnés. Sur la figure 39, les sous-ensembles suivants sont des chaînes :

$$\{4, 12, 24\}; \quad \{4, 24\}; \quad \{5\}; \quad \{3, 6, 12\}.$$

4. **Exemples d'ensembles ordonnés.** — Nous présentons dans ce paragraphe trois exemples importants d'ensembles ordonnés. Nous en verrons d'autres dans la suite du texte.

1) On considère l'ordre usuel $\leqslant$ dans l'ensemble **R** des nombres réels. Soient $a \leqslant b$ deux nombres réels. Les sous-ensembles particuliers suivants sont appelés *les intervalles d'extrémités a et b* :

$$[\![a, b]\!] = \{x \in \mathbf{R}\,;\ a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$]\!]a, b[\![= \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x < b\},$$
$$[\![a, b[\![= \{x \in \mathbf{R}\,;\ a \leqslant x < b\},$$
$$]\!]a, b]\!] = \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x \leqslant b\}.$$

Le premier est dit intervalle *fermé*, le deuxième intervalle *ouvert*, et les deux derniers intervalles *ouverts d'un côté et fermés de l'autre*. On remarque que :

$$[\![a, a]\!] = \{a\} \quad \text{et} \quad]\!]a, a[\![= \varnothing.$$

Etant donné quatre nombres réels $a < b < c < d$, on a (fig. 42) :

$$[\![a, b]\!] \cap [\![b, c]\!] = \{b\},$$
$$[\![a, b[\![\cap]\!]b, c]\!] = \varnothing,$$
$$[\![a, c]\!] \cap]\!]b, d]\!] =]\!]b, c]\!].$$

a b c d

Fig. 42

2) Dans le produit cartésien $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, on peut définir un ordre $\prec$, appelé *ordre produit*, en posant :

$(a, b) \prec (c, d)$ si et seulement si $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.

Par exemple, on a $(-7, \sqrt{2}) \prec (-\pi, 5)$.

Un élément $(c, d) \in \mathbf{R}^2$ étant donné, on distingue, sur la figure 43, quatre régions :

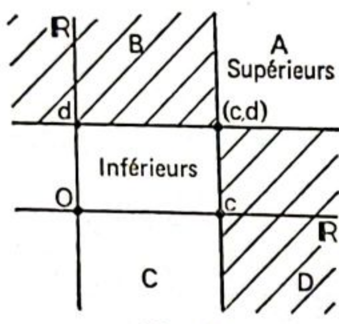


Fig. 43

• La partie A formée des éléments de $\mathbf{R}^2$ supérieurs à (c, d) ;

• La partie C formée des éléments de $\mathbf{R}^2$ inférieurs à (c, d) ;

• Les parties B et D formées des éléments incomparables avec (c, d).

Par exemple, les éléments $(-1, 7)$, $(2, 6)$ et $(3, -5)$ sont deux à deux incomparables ; l'ordre produit sur $\mathbf{R}^2$ est un ordre partiel.

3) On peut définir sur $\mathbf{R}^2$ un ordre total $\prec$ appelé *ordre lexicographique* (selon le principe du classement alphabétique des mots dans un dictionnaire) ; il est défini par :

$(a, b) \prec (c, d)$ si et seulement si $(a < c)$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$.

Un élément $(c, d) \in \mathbf{R}^2$ étant donné, la figure 44 représente en hachuré l'ensemble des éléments de $\mathbf{R}^2$ inférieurs à (c, d).

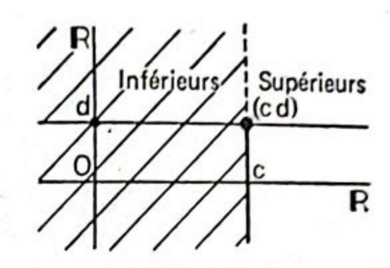


Fig. 44

Remarque. — Les deux ordres précédents permettent d'ordonner l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes (en l'identifiant à $\mathbf{R}^2$).

5. Eléments remarquables d'un ensemble ordonné.

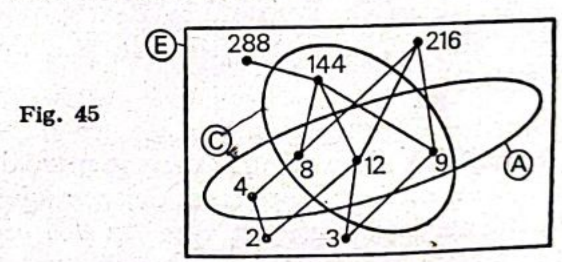
— Dans tout ce paragraphe A désigne un sous-ensemble non vide d'un ensemble E ordonné par une relation $\prec$.

A) *Majorants.* — On dit que $m \in E$ est un *majorant de A* si m suit tous les éléments de A :

$$m \in E \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow x \prec m.$$

Exemple : Soient $E = \{2, 3, 4, 8, 9, 12, 144, 216, 288\}$ et $A = \{4, 8, 9, 12\}$ ordonnés par la relation de divisibilité. Le nombre 144 est un majorant de A

Fig. 45



car 4, 8, 12 et 9 divisent 144. Pour la même raison 216 et 288 sont aussi des majorants de A.

Si A possède un majorant, on dit que A est une *partie majorée*.

Les intervalles $[\![-2, 3]\!]$ ou $]\!]-5, 17[\![$ sont des parties majorées de R ; l'ensemble des nombres rationnels x dont le carré est inférieur à 2 est une partie majorée de Q.

B) *Plus grand élément.* — Une partie majorée A contient *au plus* un de ses majorants. En effet, si m et m' sont deux majorants de A et appartiennent l'un et l'autre à A on peut écrire, par définition d'un majorant :

$$(m' \in A) \Rightarrow (m' \prec m) \quad \text{et} \quad (m \in A) \Rightarrow (m \prec m')$$

donc $m = m'$.

Soit A une partie majorée de E ; si A contient l'un de ses majorants μ on dit que μ est *le plus grand élément de A.* Il est donc défini par :

$$\mu \in A \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow x \prec \mu.$$

Exemple : Sur la figure 45, le nombre 144 est le plus grand élément de $C = \{8, 12, 9, 144\}$. L'ensemble A est majoré, mais ne possède pas de plus grand élément.

Dans R, l'intervalle $[\![0, 5[\![$ est majoré, mais ne possède pas de plus grand élément : il contient 4,9 ; 4,99 ; 4,999 ; 4,9999, etc.

De même, dans Q, l'ensemble des x tels que $x^2 \leqslant 2$ est majoré, mais ne possède pas de plus grand élément.

Remarque. — L'expression « le » plus grand élément est justifiée puisque nous avons montré qu'une partie majorée contient *au plus* un de ses majorants.

De la même façon, on dit que $m \in E$ est un *minorant* de A si m précède tous les éléments de A et m est le plus petit élément de A si, de plus, $m \in A$.

C) *Borne supérieure.* — Soit A une partie majorée d'un ensemble E ordonné par une relation $\prec$. Notons $M(A)$ l'ensemble des majorants de A. Si

$M(A)$ possède un plus petit élément s, alors s est appelé la *borne supérieure de A.*

$$s \in M(A) \quad \text{et} \quad x \in M(A) \Rightarrow x \succ s.$$

Soit s la borne supérieure de A ; en tant que majorant, s est comparable à tous les éléments de A et les suit ; en tant que plus petit élément de $M(A)$, s est comparable à tous les majorants et les précède (fig. 46).

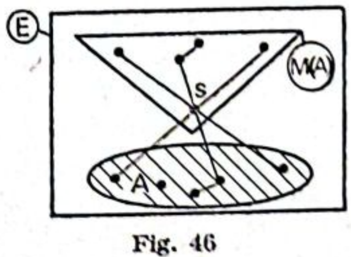


Fig. 46

Fig. 47

Une partie A de E n'est pas nécessairement majorée, donc ne possède pas nécessairement de borne supérieure. Mais une partie *majorée* de A ne possède pas non plus nécessairement de borne supérieure.

Exemples : 1) Soient $E = \{2, 8, 12, 18, 20\}$ et $A = \{2, 3\}$ ordonnés par la divisibilité. On a (fig. 47) $M(A) = \{12, 18\}$. Cet ensemble n'admet pas de plus petit élément pour la relation de divisibilité, donc A ne possède pas de borne supérieure,

2) Dans Q, l'ensemble des x tels que $x^2 \leqslant 2$, bien que majoré, ne possède pas de borne supérieure.

La notion de borne supérieure est plus générale que celle de plus grand élément. En effet, si A possède une borne supérieure s, alors s est le plus grand élément de A si et seulement si $s \in A$. La borne supérieure peut donc exister sans qu'existe un plus grand élément ; par exemple $[\![0, 1[\![$ n'a pas de plus grand élément, mais admet 1 pour borne supérieure.

La *borne inférieure* d'une partie minorée A, lorsqu'elle existe, est le plus grand des minorants. Ainsi, -3 est la borne inférieure de $]\!]-3, 2]\!]$ qui n'a pas de plus petit élément.

D) *Eléments maximaux.* — Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble ordonné $(E, \prec)$. On dit que $u \in A$ est *maximal dans A* s'il n'existe pas dans A d'éléments qui le suivent.

$$u \in A \quad \text{et} \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \succ u \Rightarrow x = u.$$

Exemple : Sur la figure 48, A possède trois éléments maximaux : a, b, f. L'élément $c \in A$ n'est pas maximal dans A car $a \in A$ le suit dans A.

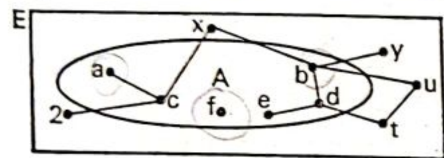


Fig. 48

— Un ensemble ordonné ne possède pas nécessairement d'élément maximal : c'est le cas de $(\mathbf{N}, \leqslant)$ ou de $(\mathbf{N}^*, |)$. Lorsqu'un ensemble ordonné possède un élément maximal, celui-ci n'est pas nécessairement unique ; sur la figure 48, les éléments a, f et b sont maximaux dans A. Remarquons enfin qu'un élément maximal dans A peut être suivi par des éléments de $E - A$: sur la figure 48, l'élément b est maximal dans A et est suivi par $x \in E - A$.

— Un élément $u \in A$ est *minimal* dans A s'il n'existe pas dans A d'éléments qui le précèdent. Sur la figure 48, les éléments c, f et e sont minimaux. Il se peut qu'un élément soit minimal et maximal ; c'est le cas de l'élément f sur la figure 48.

II. — Relations d'équivalence

1. Définitions. — On appelle *relation d'équivalence* ou *équivalence* sur un ensemble E toute relation binaire $\mathscr{R}$ sur E qui est :

— réflexive : $x \mathscr{R} x$;
— transitive : $(x \mathscr{R} y \text{ et } y \mathscr{R} z) \Rightarrow (x \mathscr{R} z)$;
— symétrique : $(x \mathscr{R} y) \Rightarrow (y \mathscr{R} x)$.

— Exemples : 1) Les relations $=$; $||$ et $\upuparrows$ sont des équivalences.

2) Les relations $\leqslant$; $\subset$; $|_{\mathbf{N}}$ et $|_{\mathbf{Z}}$ ne sont pas des équivalences car elles ne sont pas symétriques.

3) La relation $\perp$ n'est pas une équivalence, car elle n'est pas transitive.

— Une relation $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si, et seulement si :

$$\Delta(E) \subset \mathscr{R} ; \quad \mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subset \mathscr{R} ; \quad \mathscr{R} = \overset{-1}{\mathscr{R}}.$$

— Très souvent, en pratique, une relation d'équivalence est définie par une phrase de la forme : « $a \mathscr{R} b$ si, et seulement si, a et b ont le même... » ; par exemple, dans $\mathbf{Z}$ la relation « a la même parité que » ou dans l'ensemble des droites du plan la relation $||$ qui exprime que deux droites ont la même direction.

— *Notation.* — Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence ; au lieu de $a \mathscr{R} b$, on écrit parfois $a \equiv b(\mathscr{R})$ qui se lit « a équivalent à b modulo $\mathscr{R}$ ».

— Nous présenterons au § 4 quelques exemples importants de relations d'équivalence ; ils compléteront les deux exemples suivants :

1) Soit $n > 0$ un entier donné ; considérons dans $\mathbf{Z}$ la relation, appelée *congruence modulo n*, définie par : $x \equiv y\ (n)$ si, et seulement si, $x - y$ est multiple de n, c'est-à-dire $x - y = k.n$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Cette relation est une équivalence sur $\mathbf{Z}$.

$x \equiv y\ (n)$ se lit « x congru à y modulo n ».

2) Dans $\mathbf{N}^2$, considérons la relation $\mathscr{R}$ définie par :

$$((a, b)\, \mathscr{R} (a', b')) \Leftrightarrow (a + b' = a' + b).$$

C'est une équivalence sur $\mathbf{N}^2$.

2. **Classes d'équivalence.** — Soient $\mathscr{R}$ une équivalence sur un ensemble E et x un élément de E. L'image $\mathscr{R}(x)$ de x par $\mathscr{R}$ — c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E équivalents à x — est appelée la *classe d'équivalence de x modulo* $\mathscr{R}$.

Au lieu de $\mathscr{R}(x)$, nous écrirons plus souvent $\overline{x}$, qui se lit « x barre ». Donc, par définition :

$$y \in \overline{x} \quad \text{si et seulement si} \quad y \mathscr{R} x.$$

Exemple : Avec les notations introduites au paragraphe précédent, deux entiers x et y sont congrus modulo 2 si et seulement s'ils ont même parité ; pour cette équivalence :

$$\overline{5} = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, \ldots\};$$
$$\overline{-4} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}.$$

On constate qu'étant donnés une équivalence $\mathscr{R}$ sur un ensemble E et un élément x de E, la classe $\overline{x}$ est un sous-ensemble de E ; donc $\overline{x} \in \mathfrak{P}(E)$. Sur l'exemple ci-dessus, on a $\overline{-4} \subset \mathbf{Z}$.

Etudions maintenant les propriétés des classes d'équivalence. Soit $\mathscr{R}$ une équivalence sur un ensemble E.

a) $\mathscr{R}$ étant réflexive, pour tout élément x de E, on a $x \in \mathscr{R}(x) = \overline{x}$, donc :

$$\overline{x} \neq \varnothing.$$

b) $\mathscr{R}$ étant symétrique, on a :

$$(y \mathscr{R} x) \Leftrightarrow (\overline{y} = \overline{x}).$$

On sait que la symétrie peut s'exprimer par :

$$y \in \mathscr{R}(x) \Leftrightarrow x \in \mathscr{R}(y).$$

C'est-à-dire, avec nos nouvelles notations : $y \in \overline{x} \Leftrightarrow x \in \overline{y}$.

Si $\overline{y} = \overline{x}$ il est clair que l'on a $y \mathscr{R} x$. Réciproquement montrons que $y \mathscr{R} x$ entraîne $\overline{y} = \overline{x}$; pour cela supposons que l'on ait $y \mathscr{R} x$ et établissons que $\overline{y}$ est inclus dans $\overline{x}$. Soit $z \in \overline{y}$; par définition, cela veut dire que l'on a $y \mathscr{R} z$. Puisque par hypothèse on a $x \mathscr{R} y$, par transitivité on obtient $x \mathscr{R} z$, donc $z \in \overline{x}$. L'inclusion $\overline{x} \subset \overline{y}$ s'établit de façon analogue, d'où le résultat. Cette dernière formule exprime que pour connaître *tous* les éléments d'une classe d'équivalence il suffit d'en connaître *un* qu'on appelle *représentant* de la classe d'équivalence considérée. Par exemple, en géométrie euclidienne, étant donné un plan P la relation de parallélisme $\|$ est une équivalence dans l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites de ce plan. Si D est une droite de P, la classe de D modulo $\|$ est appelée la *direction de D*. Pour connaître la direction d'une droite D (c'est-à-dire toutes les droites parallèles à D), il suffit effectivement de connaître n'importe laquelle des parallèles à D. *A l'intérieur* d'une classe d'équivalence, *tous* les éléments sont en relation avec tous les autres éléments.

c) Si deux classes sont distinctes, il n'existe pas d'élément de l'une qui soit en relation avec des éléments de l'autre ; deux classes distinctes sont nécessairement disjointes :

$$(\overline{x} \neq \overline{y}) \Leftrightarrow (\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing).$$

— En effet, supposons que $\overline{x}$ soit distincte de $\overline{y}$, et que $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. On a alors $z \in \overline{x}$ ce qui entraîne $\overline{z} = \overline{x}$, et $z \in \overline{y}$ ce qui entraîne $\overline{z} = \overline{y}$. Finalement, $\overline{x} = \overline{y}$, d'où une contradiction.

— *Conclusion* : Si $\mathscr{R}$ est une équivalence sur E, $\mathscr{R}$ « partage » E en sous-ensembles *non vides* (appelés classes d'équivalence) *deux à deux disjoints* (sans éléments communs) et tels qu'à l'*intérieur de chacun d'entre eux tout élément est équivalent à tous les autres.*

3. **Ensemble quotient.** — Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Nous savons que si x est un élément de E, sa classe $\overline{x}$ est un élément de $\mathfrak{P}(E)$. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est donc un sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E)$ que l'on note $E/\mathcal{R}$ (on lit « E sur $\mathcal{R}$ ») et que l'on appelle *ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$. Par définition, on a $E/\mathcal{R} \subset \mathfrak{P}(E)$. Soit $x \in E$; alors : $\overline{x} \in E/\mathcal{R}$.

Exemple : Soit $\mathcal{R}$ la congruence modulo 2 dans $\mathbf{Z}$ étudiée précédemment ; il y a deux classes d'équivalences :

$$\overline{5} = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots\}$$

et $$\overline{-4} = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}.$$

Donc $\mathbf{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{5}, \overline{-4}\}$. Comme $\overline{5} = \overline{1}$ et comme $\overline{-4} = \overline{0}$, on peut encore écrire $\mathbf{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Cet ensemble s'appelle *l'ensemble des entiers modulo 2* et se note $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

4. **Exemples de relations d'équivalence.** — Pour illustrer l'intérêt de la notion d'équivalence, nous donnons, sans les détailler, des exemples importants en théorie des nombres, en géométrie et en analyse. Nous verrons d'autres exemples par la suite.

1) L'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers est le quotient de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ par l'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d)$ si et seulement si $a + d = b + c$.

2) Soit S l'ensemble des puissances de 10 ; l'ensemble $\mathbf{D}$ des nombres décimaux est le quotient de $\mathbf{Z} \times S$ par :

$$(a, s)\,\mathcal{R}\,(b, t) \Leftrightarrow at = bs.$$

3) L'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels est le quotient de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ par l'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

4) L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est le quotient de $\mathbf{R}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels) par la relation $\mathcal{R}$ définie par $f(X)\,\mathcal{R}\,g(X)$ si et seulement si $f(X) - g(X)$ est divisible par $X^2 + 1$. On écrit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)\,;$$

de façon analogue :

$$\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z}[X]/(X^2 + 1) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2).$$

5) L'ensemble quotient de $\mathbf{Z}$ par la congruence modulo n est noté $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; il possède n éléments :

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-2}, \overline{n-1}\}.$$

C'est *l'ensemble des entiers modulo n*.

6) Dans $\mathbf{R}^2$ (plan géométrique), deux couples de points (A, B) et (C, D) sont équipollents si les segments AD et BC ont même milieu. Ceci définit une relation d'équivalence et la classe de (A, B) est appelée un *vecteur* du plan $\mathbf{R}^2$.

7) Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par $(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $a = \alpha c$ et $b = \alpha d$. L'ensemble quotient obtenu, noté $\mathbf{P}_1(\mathbf{R})$, est appelé *la droite projective réelle*. Plus généralement on définit de la même façon les espaces projectifs réels ou complexes $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

8) Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ne s'annulant pas sur un voisinage de zéro ; on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de zéro si $f(0) = g(0)$ et si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand $x \neq 0$ tend vers zéro.

9) Sur l'ensemble des fonctions numériques continues sur un voisinage de zéro, on définit une équivalence $\sim$ par $f \sim g$ si et seulement s'il existe un voisinage de 0 sur lequel f et g coïncident.

5. **Relations de préordre.** — Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une *relation de préordre* ou un *préordre dans E*, si elle est réflexive et transitive, c'est-à-dire vérifie :

1) $x\,\mathcal{R}\,x$ pour tout x ;
2) $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$ entraîne $x\,\mathcal{R}\,z$.

Les ordres et les équivalences sont des préordres particuliers ; par contre, bien que la divisibilité dans $\mathbf{Z}$ soit un préordre, ce n'est ni un ordre ni une équivalence.

Etant donné un préordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, la relation $\sim$ sur E définie par $x \sim y$ si et seulement si $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,x$ est une équivalence dite *équivalence associée au préordre* $\mathcal{R}$.

L'ensemble quotient $E/\sim$ peut être ordonné par la relation $\leqslant$ définie par $\overline{x} \leqslant \overline{y}$ si et seulement si $x\,\mathcal{R}\,y$. On dit que $\leqslant$ est *l'ordre associé au préordre* $\mathcal{R}$. Pour ordonner un ensemble E, on peut le faire apparaître comme un ensemble quotient $F/\mathcal{R}$ d'un ensemble préordonné F.

Chapitre IV

FONCTIONS

I. — Généralités

Bien qu'occupant une place essentielle aujourd'hui, la notion de fonction ne s'est dégagée que progressivement au XIXe siècle. C'est un type particulier de relation d'un ensemble vers un autre.

1. Définitions. — Une relation binaire $\mathscr{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est appelée *relation fonctionnelle* ou *fonction* ou *application de E dans F*, si pour tout élément x de E, l'image $\mathscr{R}(x)$ de x par $\mathscr{R}$ possède exactement un élément.

On peut encore exprimer ceci en disant que si $\mathscr{R}$ est une relation fonctionnelle de E vers F, sur son graphe cartésien, toute « parallèle » à F coupe $\mathscr{R}$ en un point et un seul.

Pour noter les fonctions (bien que cela ne soit nullement une obligation), il est d'usage d'utiliser des lettres minuscules : f, g, h... ; au lieu de $x\,f\,y$ on écrit $y = f(x)$, ce qui se lit : « y égal f de x ». Cette notation porte le nom de *notation fonctionnelle*.

Si $y = f(x)$, par définition d'une fonction, y est l'unique image de x par f. On l'appelle encore *valeur de f au point x* et on écrit $f : x \mapsto y$ qui se lit « f, x flèche y ».

Etant donnée une fonction f de E dans F, on écrit $f : E \to F$ ou encore $E \xrightarrow{f} F$. Dans les deux

cas, on lit « f fonction de E dans F ». On écrit parfois :

$$f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Il ne faut pas confondre les deux « flèches » précédentes ; pour définir une fonction f de E dans F, on donne sa source et son but en écrivant $f : E \to F$, puis le « transformé » $f : x \mapsto f(x)$ d'un élément x de E. Par exemple :

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}\,; \qquad f : x \mapsto x^2 + 5.$$

Autre exemple : Etant donné un ensemble E, on note I_E *l'application identique* $I_E : E \to E$ définie par $x \mapsto x$.

Une fonction apparaît donc comme un « procédé » permettant d'associer, à chaque élément d'un ensemble E, un élément d'un ensemble F.

Remarques. — 1) Une relation de E vers F est une fonction de E dans F si, et seulement si, pour tout élément x de E part une et une seule flèche vers un élément de F. En d'autres termes, si f est une fonction de E dans F, on ne rencontre *jamais* la situation ci-dessous :

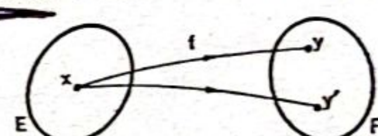


Fig. 49

2) Dans les traités mathématiques, « fonction » et « application » sont synonymes. Toutefois, pour des raisons pédagogiques, il arrive que dans l'enseignement secondaire le mot application soit employé dans le sens utilisé ici et que le terme fonction soit réservé aux relations d'un ensemble vers un autre telles que chaque élément de la source ait *au plus* une image, comme par exemple $x \mapsto \frac{x}{2}$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. Une application est alors une fonction dont le domaine d'existence coïncide avec sa source. Nous ne ferons pas cette distinction dans ce qui suit.

— Pour une fonction, comme pour toute relation, il est souvent utile de dessiner son schéma cartésien ou son diagramme sagittal. En pratique, on dresse également un *tableau des valeurs* selon le principe suivant : sur la première ligne sont portés les éléments de E, sur la seconde, en regard de chaque élément de E, est notée son image par f :

E	a	b	c	...	x	...
f	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	...	$f(x)$	...

— Exemple : soit $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $x \mapsto x^2$; le tableau des valeurs de f et son graphe sont les suivants :

	0	1	2	3	4	5 ...
F	0	1	4	9	16	25 ...

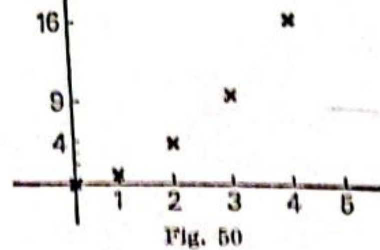


Fig. 50

2. Egalité de deux fonctions. — Deux *fonctions f et g sont égales* (on écrit $f = g$) si, et seulement si, elles ont même source E, même but et même valeur en tout point de leur source : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$. Par exemple, les deux fonctions f et g :

$$f \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \quad \text{et} \quad g \begin{cases} [0, \pi/2] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$$

sont distinctes bien que $f(x) = \sin x$ et que $g(x) = \sin x$.

— Soit f une fonction de E dans F et A un sous-ensemble de E. On appelle *restriction de f à A* la fonction g définie de A dans F de la façon suivante :

$$g(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in A.$$

— Sur la figure ci-dessous est représentée la restriction de la fonction sinus à $[0, 2\pi]$. Il est clair que pour une fonction f de E dans F donnée et pour une partie A de E fixée, il existe une et une seule restriction de f à A.

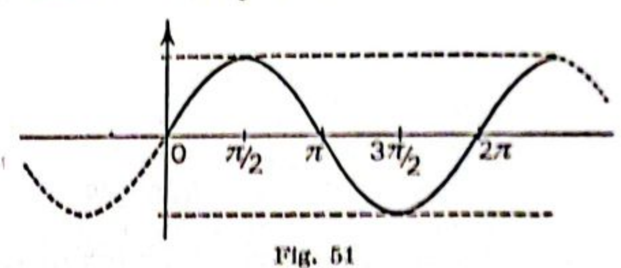


Fig. 51

— Etant donnée une fonction $f: E \to F$, un sous-ensemble A de E et $g: A \to F$ la restriction de F à A, on dit que F est un *prolongement de g* à E. Une fonction $g: A \to F$ n'admet pas un prolongement unique à E ; par exemple sur la figure 52



Fig. 52

sont représentés deux prolongements différents de la fonction $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x + 1$.

3. Composé de deux fonctions. — De la même façon que pour les relations d'un ensemble vers un autre,

on peut composer deux fonctions f et g dans cet ordre si, et seulement si, le but de f est égal à la source de g.

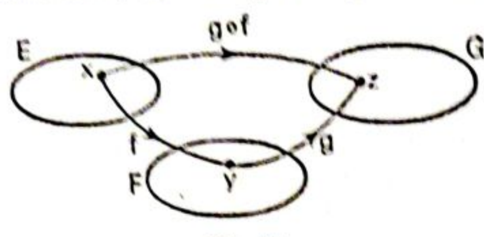


Fig. 53

— *Le composé de deux fonctions est une fonction.* — En effet, soient f une fonction de E dans F et g une fonction de F dans G. Etant donné un élément x de E, la fonction f associe à x un unique élément y de F auquel g associe un unique élément z de G. Ainsi, $g \circ f$ qui associe à x un unique élément z de G est une fonction de E dans G.

— Comme pour les relations, si f et g sont deux fonctions composables dans cet ordre, g et f ne sont pas nécessairement composables. Etant donnés un ensemble E et deux fonctions $f: E \to E$ et $g: E \to E$, les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas nécessairement égales comme le montre l'exemple ci-dessous.

— Exemple : Soient $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par :

$$f: x \mapsto x^2 + 4x + 1 \quad \text{et} \quad g: x \mapsto \sin 3x.$$

Alors $g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $f \circ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont définies par :

$$g \circ f: x \mapsto \sin\,[3(x^2 + 4x + 1)]$$

et

$$f \circ g: x \mapsto \sin^2 3x + 4 \sin 3x + 1.$$

— En pratique, pour faciliter le raisonnement et décrire certaines situations, on fait usage de diagrammes tel le suivant :

$$E \xrightarrow{f} F \quad F \xrightarrow{1_F} F \quad F \xrightarrow{g} G \quad F \xrightarrow{h} H \quad \xrightarrow{i} \quad G \xrightarrow{k} K$$

Remarque. — Etant donnée une fonction f de E dans F, sa relation réciproque $\overset{-1}{f}$ n'est pas nécessairement une *fonction* de F vers E. Sur l'exemple ci-dessous, $\overset{-1}{f}(x) = \{b, c\}$; cet ensemble possède donc plus d'un élément.

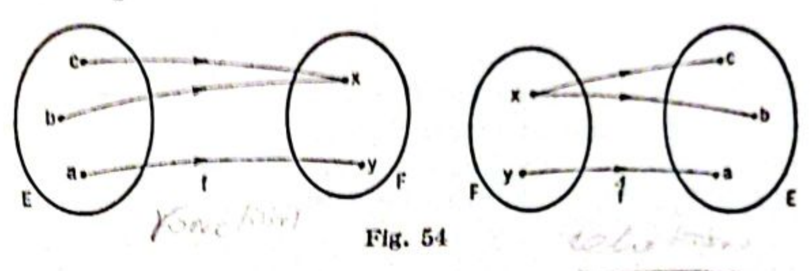


Fig. 54

II. — Exemples de fonctions

1. **Loi de composition interne.** — Nous pouvons donner maintenant la définition correcte d'une loi de composition interne.

— On appelle *loi de composition interne dans un ensemble* E toute application de $E \times E$ dans E : $(a, b) \mapsto a * b$. On parle alors de *la loi* $*$.

— Exemples de loi de composition interne dans $\mathbf{N}$:

$$(x, y) \mapsto x + y\,; \quad (x, y) \mapsto x \times y\,; \quad (x, y) \mapsto \operatorname{pgcd}(x, y).$$

— Notons que dans $\mathbf{N}$, la soustraction et la division ne sont pas des lois de composition interne : par exemple le couple $(3, 5)$ n'a d'image ni pour la soustraction ni pour la division. Dans $\mathfrak{P}(E)$, nous avons rencontré trois lois de composition interne : la réunion, l'intersection et la différence symétrique.

2. **Familles. Suites.** — Soient E et I deux ensembles. On appelle *famille d'éléments de E indexée* par I, toute application de I dans E. L'ensemble I est dit *ensemble des indices* de la famille considérée.

Lorsqu'on parle de « famille » au lieu d' « application », il est d'usage de procéder à des changements de notations ; étant donnés une famille $x : I \to E$ et un *indice* i (i.e. un élément i de I), on écrit x_i (on lit « x indice i ») au lieu de $x(i)$ et on note $(x_i)_{i \in I}$ (qui se lit « famille des x_i pour i décrivant I ») au lieu de $x : I \to E$ la famille considérée.

Une *suite d'éléments de E* est une famille d'éléments de E indexée par **N**, ou par une partie de **N**.

Etant donné un entier $n \geqslant 1$, on appelle *n-uplet* une famille d'éléments de E indexée par $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On note souvent $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n-uplet. Pour $n = 2$, c'est un *couple* et pour $n = 3$, c'est un *triplet*.

Remarque. — Etant donnée une famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$, on définit sa réunion et son intersection par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x ; \text{ il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\} ;$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x ; \text{ pour tout } i \in I \ x \in A_i\}.$$

Les définitions données précédemment de $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sont des cas particuliers de ces deux définitions.



3. Fonctions caractéristiques. — Etant donné un sous-ensemble A d'un ensemble E, on appelle *fonction caractéristique de A dans E* la fonction $\mu_A : E \to [\![0, 1]\!]$ définie par $\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mu_A(x) = 0$ sinon.

La fonction caractéristique de **Q** dans **R** est dite *fonction de Dirichlet*.

Deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E sont égaux si et seulement si leurs fonctions caractéristiques sont égales. Les fonctions caractéristiques des sous-ensembles $\bar{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ et $A \triangle B$ peuvent s'exprimer à partir des fonctions

caractéristiques de A et B. Pour cela, nous devons introduire de nouvelles notations ; étant données deux fonctions f et g définies sur E et à valeurs dans **R**, on note respectivement $\text{Min}\,(f(x), g(x))$ et $\text{Max}\,(f(x), g(x))$ le plus petit et le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$. Avec ces notations, pour tout $x \in E$, on a :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) ;$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min}\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) ;$$
$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max}\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) ;$$
$$\mu_{A - B}(x) = \text{Min}\,(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) ;$$
$$\mu_{A \triangle B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\,\mu_B(x).$$

Nous ne développerons pas plus ici cette étude ; nous indiquons seulement au paragraphe suivant comment elle se généralise par la notion de sous-ensemble flou.

4. Ensembles flous. — La notion d'appartenance à un sous-ensemble donné (i.e. la notion d'ensemble) ne permet pas l'étude mathématique de sujets imprécis comme « les hommes de grande taille » ou « les nombres réels approximativement égaux à 10 ». Pour remédier à cela, en 1965, L. A. Zadeh a introduit la notion d'*ensemble flou (fuzzy set)*, fondée sur le *degré d'appartenance*, qui généralise les fonctions caractéristiques : on introduit des fonctions $\mu_A : E \to [\![0, 1]\!]$ qui peuvent non seulement prendre les valeurs 0 et 1, mais les valeurs intermédiaires, comme une probabilité.

De façon précise, étant donné un ensemble E, un *sous-ensemble flou A* (ou, par abus, *un ensemble flou*) est une application $\mu_A : E \to [\![0, 1]\!]$. Etant donné $x \in E$, le nombre $\mu_A(x)$ est dit *degré d'appartenance de x à A*. Par définition, deux ensembles flous A et B sont égaux si et seulement si les fonctions μ_A et μ_B sont égales.

On symbolise un sous-ensemble flou A d'un ensemble E en hachurant la région située sous le graphe de la fonction μ_A (fig. 55).

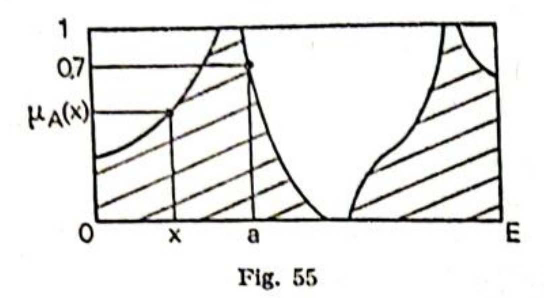


Fig. 55

Etant donné un sous-ensemble flou A de E, son complémentaire $\bar{A}$ est défini par $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

On peut également définir l'inclusion, la réunion, l'intersection, la différence, etc. Par exemple :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{Min } (\mu_A(x), \mu_B(x))\ ;$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max } (\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Sur la figure 56 l'intersection des ensembles flous A et B est représentée en hachuré.

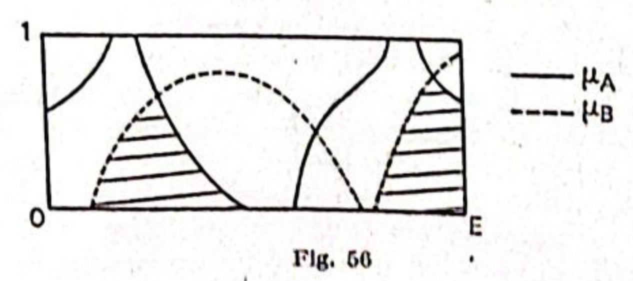


Fig. 56

Nous ne développerons pas plus ici ce sujet ; mais notons qu'il connaît un grand essor et semble utilisé dans des domaines aussi variés que la sociologie, la linguistique et l'économie, pour ne citer que ceux-là.

III. — Fonctions particulières

1. **Surjections.** — Considérons les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'image de la première est $\mathbf{R}_+$, alors que l'image de la seconde est $\mathbf{R}$.

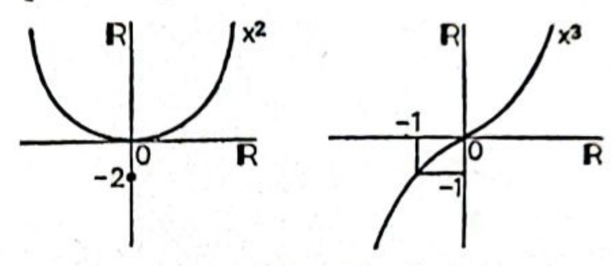


Fig. 57

Etant donnés deux ensembles E et F, une fonction f de E dans F est *surjective* ou est une *surjection* si son image $f(E)$ est égale à F.

Dans ce cas, tous les éléments de F sont atteints au moins une fois par f : pour tout élément $y \in F$, il existe *au moins* un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Si f est une fonction surjective de E dans F, on dit encore que f est une fonction de E *sur* F.

Exemples :

$I_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$ et $f : \begin{cases} \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^* \\ (x, y) \mapsto \text{pgcd } (x, y) \end{cases}$ sont surjectives.

$g : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$ et $h : \begin{cases} [0, \pi/2] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$ ne sont pas surjectives.

Dire qu'une fonction $f : E \to F$ n'est pas surjective, c'est encore dire qu'il existe $a \in F$ tel que $a \notin f(E)$.

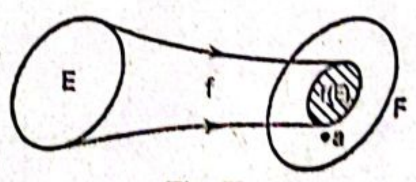


Fig. 58

Remarque. — Une fonction $f: E \to F$ est toujours une surjection de E sur son image $f(E)$.

La fonction composée de deux surjections composables $f: E \to F$ et $g: F \to G$ est une surjection $g \circ f: E \to G$. En effet, soit z un élément de G ; comme g est surjective, il existe un élément y dans F tel que $z = g(y)$. La fonction f étant surjective, il existe un élément x dans E tel que $y = f(x)$; alors :

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Exemples fondamentaux. — 1) Soit $\mathscr{R}$ une équivalence sur un ensemble E. L'application $x \mapsto \overline{x}$ de E dans $E/\mathscr{R}$ est surjective. On l'appelle la *surjection canonique de E sur E/$\mathscr{R}$*. La figure 59 représente la surjection canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

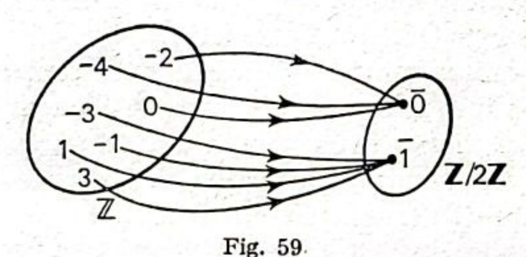
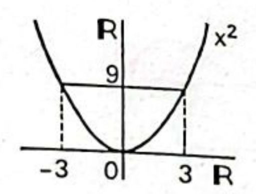


Fig. 59

2) Soit $n \geqslant 1$ un entier ; l'application $x \mapsto x^n$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est surjective si et seulement si n est impair.

2. **Injections.** — Considérons les fonctions $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto e^x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Par exemple, les deux nombres réels 3 et -3 ont la même image



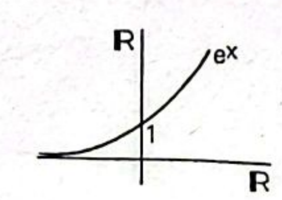
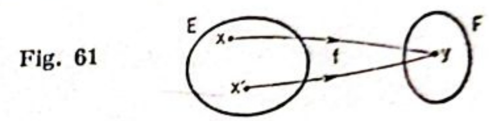


Fig. 60

par f ; par contre deux nombres réels distincts ont par g des images distinctes.

Etant donnés deux ensembles E et F, une fonction f de E dans F est *injective* ou est *une injection* si deux éléments distincts de E ont par f des images distinctes dans F. C'est-à-dire que l'on ne peut jamais rencontrer la situation ci-dessous.

Fig. 61



Une fonction f est injective si, et seulement si, elle vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x') ; \qquad (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')).$$

Exemples :

$I_E: \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$ et $f: \begin{cases} [\![0, \pi/2]\!] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$ sont injectives.

$g: \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$ et $h: \begin{cases} \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^* \\ (x, y) \mapsto \text{pgcd}\,(x, y) \end{cases}$ ne sont pas injectives.

L'application composée de deux injections est une injection.

Supposons que l'on ait : $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Posons $y = f(x)$ et $y' = f(x')$; la fonction g étant injective : $g(y) = g(y')$ entraîne $y = y'$. De même f étant injective, $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$.

Exemples fondamentaux. — 1) Etant donné un sous-ensemble A d'un ensemble B, l'application $x \mapsto x$ de A dans B est appelée *l'injection canonique* de A dans B. On la note parfois $A \hookrightarrow B$.

2) L'application $x \mapsto \{x\}$ est une injection de E dans $\mathfrak{P}(E)$.

3) Soit $n \geqslant 1$ un entier ; l'application $x \mapsto x^n$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est injective si et seulement si n est impair.

On peut faire un classement des fonctions en quatre types, de la façon suivante :

1) Non injectives, non surjectives. Exemple : $x \mapsto \sin x$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$;
2) Injectives, non surjectives. Exemple : $x \mapsto \sin x$ de $[\![0, \pi/2]\!]$ dans $\mathbf{R}$;
3) Non injectives et surjectives. Exemple : $x \mapsto \sin x$ de $\mathbf{R}$ sur $[\![0, 1]\!]$;
4) Injectives et surjectives. Exemple : $x \mapsto \sin x$ de $[\![0, \pi/2]\!]$ sur $[\![0, 1]\!]$.

3. **Bijections.** — Venons-en maintenant à la notion la plus importante présentée dans cet ouvrage.

Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle *bijection* ou *application bijective* de E dans F toute application de E dans F à la fois injective et surjective. Une bijection de E dans F est donc une application de E dans F telle que :

— tout élément y de F est l'image par f d'*au moins* un élément x de E (surjectivité) ;
— les éléments de F sont l'image d'*au plus* un élément de E (injectivité).

En résumé une bijection de E sur F est une application de E sur F telle que *tout élément de F est l'image par cette application d'un élément de E, et d'un seul.*

Exemples :

$$I_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} [\![0, \pi/2]\!] \to [\![0, 1]\!] \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \quad \text{sont bijectives.}$$

$$g : \begin{cases} [\![0, \pi/2]\!] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbf{N}^* \, \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^* \\ (x, y) \mapsto \text{pgcd}\,(x, y) \end{cases} \quad \text{ne sont pas bijectives.}$$

Propriétés des bijections. — 1) *Le composé de deux bijections composables est une bijection.* Car d'après ce que nous avons vu aux deux paragraphes précédents le composé de deux injections est une injection, et le composé de deux surjections est une surjection.

2) *La réciproque d'une bijection de E sur F est une bijection de F sur E.* En effet, soit f une bijection de E sur F.

Puisque la fonction f est une injection de E sur F, la relation $\overset{-1}{f}$ est une fonction de F dans E admettant $f(E)$ pour domaine d'existence.

La fonction f étant surjective, $f(E) = F$, donc $\overset{-1}{f}$ est une application de F dans E.

Le domaine d'existence de f étant E, l'image réciproque de F par $\overset{-1}{f}$ est E, donc cette application est surjective.

Vérifions enfin que $\overset{-1}{f}$ est injective. Supposons que l'on ait : $\overset{-1}{f}(y) = \overset{-1}{f}(y')$; alors $f(\overset{-1}{f}(y)) = f(\overset{-1}{f}(y'))$; comme $f \circ \overset{-1}{f} = I_F$, on a : $y = y'$.

Les formules valables pour les relations d'un ensemble vers un autre s'appliquent ici. En particulier :

$$(f \circ g)^{-1} = \overset{-1}{g} \circ \overset{-1}{f}.$$

Notons encore que si f est une bijection de E sur F, alors :

$$\overset{-1}{f} \circ f = I_E \quad \text{et} \quad f \circ \overset{-1}{f} = I_F.$$

Exemples de bijections. — 1) Etant donnés deux ensembles E et F, l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$ du produit cartésien $E \times F$ dans le produit cartésien $F \times E$ est bijective.

2) Soit $n \geqslant 1$ un entier ; l'application $x \mapsto x^n$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est bijective si et seulement si n est impair.

3) Etant donné un entier $n \geqslant 1$, l'application $x \mapsto nx$ de $\mathbf{Z}$ sur $n\mathbf{Z}$ est une bijection.

Le chapitre suivant fournira d'autres exemples remarquables ; terminons ce paragraphe par un exemple d'utilisation de la notion de bijection.

Etant donné deux ensembles E et F, non nécessairement disjoints, on appelle *somme directe* ou *réunion disjointe* de E et F un ensemble $E' \cup F'$ où E' et F' sont deux ensembles disjoints en bijection respectivement avec E et F. On peut, par exemple, prendre $E' = \{1\} \times E$ et $F' = \{2\} \times F$; les ensembles E' et F' sont clairement disjoints et les applications $x \mapsto (1, x)$ et $y \mapsto (2, y)$ sont des bijections de E sur E' et de F sur F'. On note $E \amalg F$ la somme directe de E et F. La construction de la réunion disjointe est symbolisée sur la figure 62.

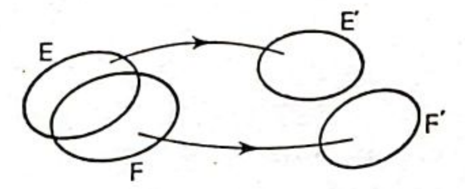


Fig. 62

4. **Partition d'un ensemble.** — Soit E un ensemble ; on dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E réalise une *partition de* E si, et seulement si :

a) aucun des ensembles A_i n'est vide ;

b) deux ensembles distincts de cette famille sont disjoints :

$$(i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j = \varnothing) ;$$

c) l'ensemble E est égal à la réunion de tous les éléments de cette famille :

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Par exemple, étant donné $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les ensembles $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$ et $A_3 = \{4, 5, 6\}$ réalisent une partition de E.

Exemple fondamental. — Soit $\mathcal{R}$ une équivalence sur un ensemble E ; les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forment une partition de E :

— une classe d'équivalence $\bar{x}$ n'est jamais vide puisque $x \in \bar{x}$;

— nous avons vu que deux classes distinctes sont disjointes ;

— si $x \in E$, on a $x \in \bar{x}$; donc $E \subset \bigcup_{x \in E} \bar{x}$. Comme $\bar{x}$ est un sous-ensemble de E, on a $\bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E$, d'où finalement $E = \bigcup_{x \in E} \bar{x}$.

En fait, nous allons montrer un théorème remarquable : *il existe une bijection entre l'ensemble $R(E)$ des équivalences sur E et l'ensemble $P(E)$ des partitions de E.*

Nous venons de voir qu'à partir d'une équivalence $\mathcal{R}$ sur E, on sait construire *une* partition (à l'aide des classes d'équivalences) que nous noterons $f(\mathcal{R})$. Ainsi $\mathcal{R} \mapsto f(\mathcal{R})$ définit une application f de $R(E)$ dans $P(E)$.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E. Considérons la relation $\mathcal{S}$ définie par $x \mathcal{S} y$ si et seulement si x et y appartiennent au même A_i. Il est clair que $\mathcal{S}$ est une équivalence sur E. Par ce procédé, nous définissons une application g de $P(E)$ dans $R(E)$. Nous aurons établi que f est une bijection si nous prouvons que $f \circ g = I_{P(E)}$ et $g \circ f = I_{R(E)}$. Ceci provient de la remarque suivante : Soit $\mathcal{R}$ une équivalence sur E et $f(\mathcal{R})$ la partition qui lui est associée par f ; si $\mathcal{S}$ est l'équivalence construite à partir de $f(\mathcal{R})$, par le procédé décrit plus haut, on a :

$$(x \mathcal{S} y) \Leftrightarrow (x \in \bar{y}) \Leftrightarrow (x \mathcal{R} y).$$

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$; ceci permet d'écrire :

$$g \circ f(\mathcal{R}) = g(\mathcal{S}(\mathcal{R})) = \mathcal{R} = I(\mathcal{R}_{R(E)}).$$

Donc $g \circ f = I_{R(E)}$. On voit de même que : $f \circ g = I_{R(E)}$.

Ce résultat montre que, *pour définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, il revient au même de se donner explicitement cette relation ou l'ensemble de ses classes d'équivalence.*

CHAPITRE V

CARDINAUX

I. — Définitions

Considérons l'ensemble $E = \{u, v, y, s, x, t\}$. Combien possède-t-il d'éléments ? Six. Comment procède-t-on pour affirmer ceci ? On *compte* les éléments, c'est-à-dire qu'à chaque objet de l'ensemble E on associe l'un des nombres de l'ensemble $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de telle sorte que tous les éléments de E se voient attribués d'un nombre et d'un seul. En d'autres termes, on a construit une bijection entre E et F. On en conclut : « E et F ont le même nombre d'éléments. » Par une convention *implicite* F possède six éléments ; on en a déduit : « E possède six éléments. »

Dans ce raisonnement, peu importe la bijection choisie. Le résultat demeure le même si l'on prend une autre bijection de F sur E. Sur la figure 63 nous avons symbolisé deux bijections distinctes entre E et F.

Fig. 63

Soit $G = \{a, b, c, d, e, f\}$. Cet ensemble possède aussi six éléments ; on peut le voir en refaisant le même raisonnement que précédemment ou bien en

établissant une bijection entre E et G. Nous allons préciser ceci et le généraliser aux ensembles infinis, ce qui nous conduira au seuil de ce que l'on nomme habituellement *la théorie des ensembles*.

1. Equipotences. — On dit qu'un ensemble E est *équipotent* à un ensemble F ou que *E et F ont le même cardinal* ou *la même puissance* s'il existe une bijection de E sur F. On écrit alors :

$$E \text{ eq } F \quad \text{ou} \quad \text{Card } E = \text{Card } F.$$

Intuitivement, dire que deux ensembles ont le même cardinal c'est dire qu'ils ont le même *nombre d'éléments*. Ceci définit une relation *(relation d'équipotence)* dont nous allons examiner les propriétés :

1) Elle est réflexive : En effet, I_E est une bijection de E sur E, donc :

$$E \text{ eq } E.$$

2) Elle est symétrique : Si E est équipotent à F, par définition il existe une bijection f de E sur F; alors, $\overset{-1}{f}$ est une bijection de F sur E, donc F est équipotent à E, soit :

$$(E \text{ eq } F) \Rightarrow (F \text{ eq } E).$$

3) Elle est transitive : Si E est équipotent à F, il existe une bijection f de E sur F ; si F est équipotent à G, il existe une bijection g de F sur G; alors $g \circ f$ est une bijection de E sur G, ce qui montre que E est équipotent à G ; donc :

$$(E \text{ eq } F) \text{ et } (F \text{ eq } G) \Rightarrow (E \text{ eq } G).$$

L'équipotence est une relation d'équivalence.

Nous ne parlerons pas des problèmes d'ordre logique posés par la définition des cardinaux. L'équipotence n'est pas une relation d'équivalence *dans un ensemble*, puisque l'on ne peut pas parler de « l'ensemble de tous les ensembles », ce qui exclut de considérer les classes d'équivalence pour cette relation.

Considérons les ensembles $\varnothing$; $\{1\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 2, 3\}$; ... Tout ensemble fini est équipotent à un et un seul de ces ensembles. De la même façon, on pose comme axiome de la théorie des ensembles (ou l'on montre à partir de l'étude des ordinaux) qu'il existe des ensembles appelés *nombres cardinaux* ou *cardinaux* tels que tout ensemble E donné soit équipotent à un et un seul d'entre eux ; ce cardinal est alors appelé *le cardinal* ou *la puissance de* E. On le note Card E ou, suivant les auteurs, $|E|$, $\# E$, $\overline{E}$ ou encore $\overline{\overline{E}}$. *Un cardinal est donc un ensemble.* Par contre, nous démontrerons au chapitre suivant que les nombres cardinaux ne constituent pas un ensemble.

2. **Comparaison des cardinaux.** — Etant donné les ensembles $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{x, y\}$, quel est celui qui a le moins d'éléments ? Intuitivement, on fait le raisonnement symbolisé ci-dessous :

$$\begin{array}{l} F = \{x, y\} \\ \quad\ \downarrow\ \downarrow \\ E = \{a, b, c, d\} \end{array}$$

Fig. 64

On construit une application de F dans E qui, à tout élément de F, associe un élément unique de E, mais qui n'atteint pas nécessairement tous les éléments de E. Cette application est une *injection* de F dans E. Afin de pouvoir *comparer* les cardinaux, nous allons préciser cette idée, et nous en servir pour définir une relation d'ordre entre cardinaux.

Soient $m = \text{Card } E$ et $n = \text{Card } F$ deux cardinaux. On dit que m est *inférieur* à n (on écrit $m \leqslant n$) s'il existe une injection de E dans F. Cela veut encore dire que *E est équipotent à une partie de F.*

Sur l'exemple du début de ce paragraphe, on peut écrire Card $F \leqslant$ Card E.

a) Cette définition est indépendante des ensembles E et F. En effet, s'il existe une injection f de E dans F, si

$$m = \text{Card } E = \text{Card } E' \quad \text{et} \quad n = \text{Card } F = \text{Card } F',$$

alors par définition il existe une bijection g de E sur E', une bijection h de F sur F', et l'application $h \circ f \circ \overset{-1}{g}$ est une injection de E' dans F'.

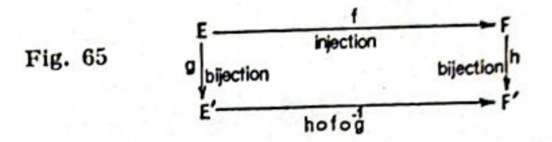


Fig. 65

b) On vérifie aisément que la relation $\leqslant$ définie entre nombres cardinaux est réflexive et transitive.

c) Il semble intuitif que cette relation soit également antisymétrique. En fait, c'est un résultat non trivial conjecturé par Cantor en 1895 et démontré par Bernstein en 1898. « L'une des perles des mathématiques » (K. Prikry). On l'appelle aujourd'hui *théorème de Bernstein* ou de *Cantor-Bernstein*.

On démontre, en utilisant l'axiome du choix (v. chap. VI), que deux cardinaux m et n sont comparables : on a $m \leqslant n$ ou $n \leqslant m$.

3. **Arithmétique des cardinaux.** — Nous présentons maintenant les opérations les plus courantes entre cardinaux : addition, multiplication et exponentiation.

1) Soient A et B deux ensembles disjoints ; si A' et B' sont deux autres ensembles disjoints respectivement équipotents à A et à B, on vérifie que $A \cup B$ est équipotent à $A' \cup B'$. On pose alors :

$$\text{Card } A + \text{Card } B = \text{Card } (A \cup B).$$

Ceci définit la somme de deux cardinaux. L'addition des cardinaux est commutative car $A \cup B = B \cup A$, donc :

$$\text{Card } A + \text{Card } B = \text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (B \cup A) = \text{Card } B + \text{Card } A.$$

On vérifie de même que cette addition est associative :

$$m + (n + p) = (m + n) + p.$$

2) Si A et A' sont équipotents, si B et B' sont équipotents, on peut voir que $A \times B$ est équipotent à $A' \times B'$. On pose :

$$(\text{Card } A).(\text{Card } B) = \text{Card } (A \times B).$$

Ceci définit le produit de deux cardinaux. Nous avons montré qu'il existe une bijection entre $A \times B$ et $B \times A$; donc :

$$\text{Card } (A \times B) = \text{Card } (B \times A)$$

et la multiplication des cardinaux est commutative :

$$(\text{Card } A).(\text{Card } B) = \text{Card } (A \times B) = \text{Card } (B \times A) = (\text{Card } B).(\text{Card } A).$$

On peut démontrer que cette multiplication est associative :

$$m.(n.p) = (m.n).p.$$

Par définition :

$$(\text{Card } E)^2 = \text{Card } (E \times E) = \text{Card } E^2.$$

3) Convenons de noter E^F l'ensemble des applications de F dans E. On montre que si E est équipotent à E' et F équipotent à F', alors E^F est équipotent à $E'^{F'}$. On pose :

$$(\text{Card } E)^{\text{Card } F} = \text{Card } (E^F).$$

Ceci définit l'*exponentiation* des cardinaux.

4) Soient m, n et p trois cardinaux ; si $m \leqslant n$, alors $m + p \leqslant n + p$ et $mp \leqslant np$.

II. — Cardinaux finis. Cardinaux infinis

1. **Cardinaux finis.** — *Tout ensemble équipotent à l'ensemble vide est vide.* On appelle zéro (on note 0) le cardinal de l'ensemble vide :

$$0 = \text{Card } \varnothing.$$

Deux singletons sont équipotents. En effet, soient $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ deux singletons ; l'application $a \mapsto b$ est une bijection de A sur B.

On appelle *Un (on note 1)* le cardinal d'un singleton. Comme $\{0\}$ et $\{\varnothing\}$ sont des singletons particuliers, on peut écrire :

$$1 = \text{Card } \{0\} = \text{Card } \{\varnothing\}.$$

Un singleton n'étant jamais vide, nous sommes assurés que les cardinaux 1 et 0 sont distincts :

$$0 \neq 1.$$

Deux paires sont toujours équipotentes. En effet, soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{c, d\}$ deux paires ; l'application $a \mapsto c$ et $b \mapsto d$ définie de A sur B est une bijection. On appelle *Deux (on note 2)* le cardinal d'une paire. Comme $\{0, 1\}$ et $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont deux paires particulières, on peut écrire :

$$2 = \text{Card } \{0, 1\} = \text{Card } \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Une paire n'étant jamais vide et toujours distincte d'un singleton on a :

$$2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2 \neq 1.$$

Par ce procédé on construit successivement des cardinaux appelés *cardinaux finis (entiers naturels ou naturels) distincts les uns des autres*, par exemple :

$$3 = \text{Card } \{0, 1, 2\} = \text{Card } \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

Soit n un cardinal fini quelconque ; par définition $n + 1$ est le cardinal de $A \cup B$ où A est un

ensemble de cardinal n et B un singleton tel que $A \cap B = \varnothing$. On peut vérifier que :

$$n + 1 \neq n.$$

Nous verrons que cette dernière propriété, en fait, caractérise les ensembles finis. Intuitivement, le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Remarques. — 1) Il peut sembler que nous ayons fait une pétition de principe puisque nous avons défini un singleton comme étant un ensemble réduit à *un* élément, puis 1 comme le cardinal d'un singleton.

En fait, on peut définir $\varnothing$, un singleton, une paire sans faire appel aux nombres entiers naturels ; par exemple A est un singleton si et seulement si :

$$(x \in A \quad \text{et} \quad y \in A) \Rightarrow (x = y).$$

La notion de cardinal permet donc de *définir* les naturels.

2) A partir des définitions précédentes, on peut alors *démontrer* rigoureusement des résultats comme :

$$0 + 1 = 1 \qquad \text{ou} \qquad 1 + 1 = 2.$$

Par exemple :

$$1 + 1 = \text{Card}\,\{x\} + \text{Card}\,\{y\} = \text{Card}\,\{x, y\} = 2.$$

De même, puisque $x \mapsto y$ est une injection non surjective de $\{x\}$ dans $\{y, z\}$ on a $1 < 2$. On *démontre* ainsi que

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$$

L'étude des ensembles finis constitue une branche de la mathématique appelée *analyse combinatoire*. Ses résultats, comme ceux que nous donnons sans démonstration, peuvent sembler intuitifs ; mais leurs démonstrations (qui s'établissent par récurrence) présentent parfois des difficultés notables.

1) Soit E un ensemble fini ; toute partie A de E est finie et l'on a $\text{Card}\,A \leqslant \text{Card}\,E$. En outre, si A est une partie propre de E alors :

$$\text{Card}\,A < \text{Card}\,E.$$

En d'autres termes, étant donné *un ensemble fini E, il n'existe pas de bijection de E sur l'une de ses parties propres.*

Cet énoncé moderne de l'axiome d'Euclide : « le tout est plus grand que la partie », est devenu un théorème de la théorie des ensembles *finis.*

2) Si $\text{Card}\,E = n$, alors $\text{Card}\,\mathfrak{P}(E) = 2^n$,

soit : $$\text{Card}\,\mathfrak{P}(E) = 2^{\text{Card}\,E}.$$

Ce résultat classique d'analyse combinatoire (1) peut être retrouvé en construisant un *arbre*. Comme pour les fonctions caractéristiques, étant donné une partie A de E, chaque élément de E est affecté d'une « réponse » : « oui » (en traits pleins) s'il

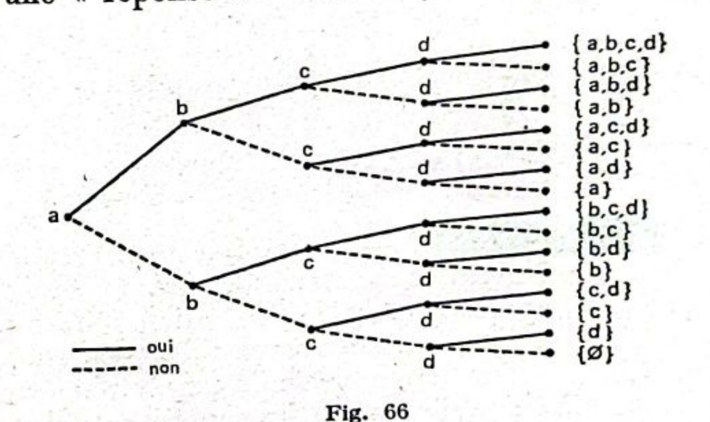


Fig. 66

appartient à A et « non » (en traits pointillés) s'il ne lui appartient pas. Pour construire toutes les parties de E, on examine tous les cas possibles, élément par élément. Nous l'avons fait ci-dessus pour un ensemble à quatre éléments $E = \{a, b, c, d\}$.

(1) Voir Casanova, *L'algèbre de Boole*, « Que sais-je ? », n° 1246.

Cette construction permet de voir que :

$$\mathfrak{P}(\{a, b, c, d\}) = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b\}, \{c, d\}, \{c\}, \{d\}, \varnothing\}.$$

Il en découle que le nombre de relations binaires dans un ensemble fini à n éléments est 2^{n^2}.

Soient E et F deux ensembles finis ayant respectivement m et n éléments. Quel est le nombre $n!$ (on lit « factorielle n ») de bijections de E dans E ? Si $m \leqslant n$ [resp. $m \geqslant n$], quel est le nombre $\binom{n}{m}$ [resp. $\Sigma(m, n)$] d'injections [resp. de surjections] de E dans F ? Des questions comme celles-ci peuvent être considérées comme l'un des points de départ de l'analyse combinatoire. On établit, par exemple, que :

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

et que
$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

La formule qui donne $\Sigma(m, n)$, plus complexe, conduit à l'étude des *nombres de Stirling* (2) et s'écrit :

$$\Sigma(m, n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} \binom{n}{i} i^m.$$

2. **Cardinaux infinis.** — Nous admettrons que les cardinaux finis (entiers naturels) forment un ensemble, noté N, appelé l'ensemble des entiers naturels. *Le cardinal de cet ensemble n'est pas fini ;* en effet, nous savons qu'un ensemble fini ne peut pas être équipotent à l'une de ses parties propres ; or l'application $n \mapsto 2n$ est une bijection de N sur le sous-ensemble propre 2N des nombres pairs.

0	1	2	3	4	. . .	n	. . .
↕	↕	↕	↕	↕		↕	
0	2	4	6	8	. . .	2n	. . .

Fig. 67

(2) Voir Bouvier-George (sous la direction de Le Lionnais), *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, 1979.

On dit qu'un ensemble est *infini* si son cardinal n'est pas un cardinal fini. L'ensemble N des entiers naturels est un ensemble infini dont le cardinal est noté $\aleph_0$, ce qui se lit *aleph zéro* (aleph est la première lettre de l'alphabet hébreux) :

$$\text{Card N} = \aleph_0.$$

Tout ensemble équipotent à N, par exemple 2N, est dit *infini dénombrable*. Cela exprime que l'on peut dénombrer, numéroter ses éléments à l'aide des nombres entiers naturels. Plus généralement, on appelle *ensemble dénombrable* tout ensemble équipotent à une partie (finie ou non) de N.

Dans ce qui suit, nous allons dégager ce qui distingue les ensembles finis des ensembles infinis. Puis nous montrerons que tous les ensembles infinis ne sont pas nécessairement infinis dénombrables.

La possibilité pour un ensemble de pouvoir être équipotent à l'une de ses parties propres (c'est le cas de N nous venons de le voir) est une propriété *caractéristique* des ensembles infinis. De façon précise :

Théorème ou axiome de Dedekind. — Un ensemble E est infini si et seulement s'il est équipotent à l'une de ses parties propres.

Les propriétés des ensembles infinis ne sont donc pas toujours celles que l'on aurait pu attendre intuitivement. D'autres exemples illustrent ceci :

Deux segments de droite sont toujours équipotents. Sur la figure 68, à tout point x du segment CD, on peut faire correspondre un *unique* point $f(x)$ du segment AB et tout point de AB est atteint par

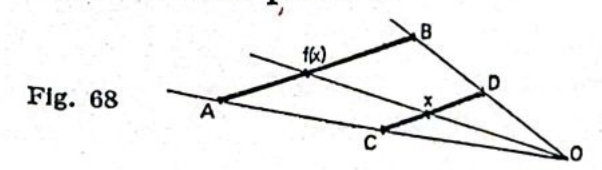


Fig. 68

ce procédé. L'application $x \mapsto f(x)$ ainsi définie est une bijection du segment CD sur le segment AB.

De la même façon, un segment de droite et une demi-droite (fig. 69) ou un segment de droite et un demi-cercle (fig. 70) sont équipotents.

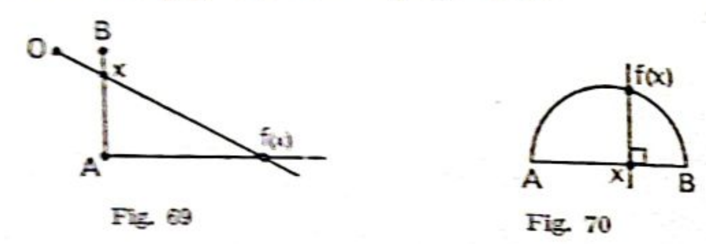


Fig. 69 Fig. 70

Démontrons maintenant un premier *théorème de Cantor*.

Pour tout ensemble E :

$$\text{Card } E < \text{Card } \mathfrak{P}(E).$$

Puisque $x \mapsto \{x\}$ de E dans $\mathfrak{P}(E)$ est injective, par définition de la relation d'ordre entre cardinaux, on a :

$$\text{Card } E \leqslant \text{Card } \mathfrak{P}(E).$$

Pour montrer que cette inégalité est stricte, il suffit de prouver qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathfrak{P}(E)$, donc qu'une application $f : E \to \mathfrak{P}(E)$ quelconque n'est jamais surjective.

Soit f une application de E dans $\mathfrak{P}(E)$; posons :

$$Y = \{x;\ x \in E \text{ et } x \notin f(x)\}.$$

L'ensemble Y est un sous-ensemble de E, donc un élément de $\mathfrak{P}(E)$ et Y n'est pas atteint par f car :

— si $x \notin Y$, par définition $x \in f(x)$, donc $f(x) \neq Y$;
— si $x \in Y$, par définition $x \notin f(x)$ donc $f(x) \neq Y$.

D'où le résultat.

En particulier, pour tout entier naturel n, on a :

$$n < 2^n.$$

3. **Ensembles infinis dénombrables.** — Nous avons déjà donné un exemple d'ensemble infini dénombrable distinct de **N** : l'ensemble 2**N** des entiers pairs. Nous allons maintenant en indiquer d'autres.

A) **N** × **N** *est infini dénombrable.* — Considérons la figure ci-dessous, elle montre que l'on peut effectivement indexer tous les couples de nombres entiers à l'aide des entiers naturels.

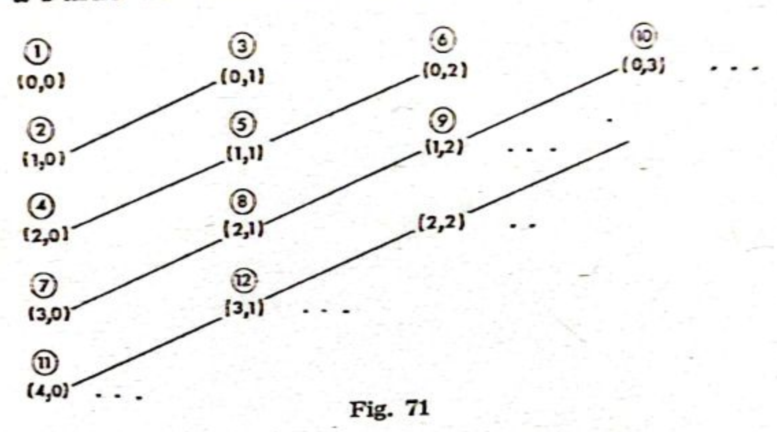


Fig. 71

Puisque Card (**N** × **N**) = Card **N**, par définition du carré d'un cardinal, on a :

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$, par récurrence sur n, on obtient :

$$\aleph_0^n = \aleph_0.$$

Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 1$, puisque $1 \leqslant n \leqslant \aleph_0$, on en déduit que $\aleph_0 \leqslant n\aleph_0 \leqslant \aleph_0^2$ d'où :

$$n\aleph_0 = \aleph_0.$$

Remarque. — L'application $(a, b) \mapsto 2^a(2b+1) - 1$ est une bijection de **N** × **N** sur **N**. Etant donné des entiers premiers distincts $p_1, p_2, \ldots, p_k$, l'application :

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mapsto p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

est une injection de $\mathbf{N}^k$ dans **N**.

B) *La réunion de deux ensembles infinis dénombrables est un ensemble infini dénombrable.* — En effet, soient A et B deux ensembles infinis dénombrables, f_1 et f_2 deux bijections de **N** respectivement sur A et B. Considérons l'application h à valeurs dans $A \cup B$, définie sur $\{1, 2\} \times \mathbf{N}$ par :

$$h : (i, n) \mapsto f_i(n) \qquad i = 1 \text{ ou } 2.$$

Il est facile de vérifier que c'est une bijection, donc que le cardinal de $A \cup B$ est égal à :

$$\text{Card}\,(\{1, 2\} \times \mathbf{N}) = 2\,\text{Card}\,\mathbf{N} = 2\aleph_0 = \aleph_0.$$

Donc $A \cup B$ est dénombrable et :

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

De plus, pour tout entier n, puisque $0 \leqslant n \leqslant \aleph_0$, on a $\aleph_0 \leqslant n + \aleph_0 \leqslant \aleph_0 + \aleph_0$ et donc :

$$n + \aleph_0 = \aleph_0.$$

C) *L'ensemble* **Q** *des nombres rationnels est infini dénombrable.* — On peut le voir en considérant la bijection entre **N** et $\mathbf{Q}^+$ définie ci-dessous :

On écrit les fractions sous forme irréductible et on les range de telle sorte que la somme de leur numérateur et de leur dénominateur soit croissante. Il est alors possible de les indexer de la façon suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1/1	1/2	2/1	1/3	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5 ...

Fig. 72

Donc : $\text{Card}\,\mathbf{Q}^+ = \aleph_0$; de même $\text{Card}\,\mathbf{Q}^- = \aleph_0$ et :

$$\text{Card}\,\mathbf{Q} = \text{Card}\,(\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-) = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Puisque $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, on a donc :

$$\aleph_0 = \text{Card}\,\mathbf{N} \leqslant \text{Card}\,\mathbf{Z} \leqslant \text{Card}\,\mathbf{Q} = \aleph_0.$$

L'ensemble **Z** des entiers est infini dénombrable.

Les formules établies plus haut prouvent que l'algèbre des cardinaux infinis diffère de l'algèbre des cardinaux finis ; par exemple, pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = n\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0.$$

4. La puissance du continu. — Puisque pour tout ensemble E on a $\text{Card}\,E < \text{Card}\,\mathfrak{P}(E)$, en particulier on a $\aleph_0 < \text{Card}\,\mathfrak{P}(\mathbf{N})$. *Il existe donc des ensembles infinis non dénombrables.* Précisons ceci. Un théorème de Cantor prouve que pour tout ensemble E fini ou non :

$$\text{Card}\,\mathfrak{P}(E) = 2^{\text{Card}\,E}$$

On a donc : $\qquad \text{Card}\,\mathfrak{P}(\mathbf{N}) = 2^{\aleph_0}.$

Le cardinal de $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$, appelé *puissance du continu*, est noté $\mathfrak{c}$. Un premier problème se pose alors : donner un exemple d'ensemble autre que $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ ayant la puissance du continu. Cantor a démontré : *l'ensemble* **R** *des nombres réels a la puissance du continu* :

$$\text{Card}\,\mathbf{R} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = 2^{\text{Card}\,\mathbf{N}}.$$

Montrons que l'ensemble **R** des nombres réels n'est pas dénombrable. Pour cela, nous allons utiliser la *méthode de la diagonale*, imaginée par Cantor, pour établir que l'intervalle $I = [\![0, 1]\!]$ contient une infinité non dénombrable d'éléments.

Chaque nombre réel x de I peut s'écrire à l'aide de son développement décimal $x = 0, x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\dots x^{(n)}\dots$

Supposons que l'intervalle I soit dénombrable et soit $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ la suite des éléments de I. Chaque a_n peut s'écrire $a_n = 0, a_n^{(1)}\,a_n^{(2)}\dots a_n^{(n)}\dots$

Considérons maintenant le nombre réel $b \in I$ défini par :

$$b^{(n)} = 0 \quad \text{si} \quad a_n^{(n)} \neq 0 ;$$

et

$$b^{(n)} = 1 \quad \text{si} \quad a_n^{(n)} = 0.$$

Les $a_n^{(n)}$ pris en considération pour définir b figurent sur la diagonale du tableau ci-dessous.

$$\begin{array}{lllllll}
0, & \boxed{a_1^{(1)}} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & \dots & a_1^{(n)} & \dots \\
0, & a_2^{(1)} & \boxed{a_2^{(2)}} & a_2^{(3)} & \dots & a_2^{(n)} & \dots \\
 & & & \ddots & & & \\
0, & a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & a_n^{(3)} & \dots & \boxed{a_n^{(n)}} & \dots
\end{array}$$

Le nombre réel $b \in I$ ainsi obtenu n'est égal à aucun des a_n, d'où une contradiction avec l'hypothèse : $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est la suite des éléments de I.

Il est aisé de donner d'autres exemples d'ensembles ayant la puissance du continu : *tout intervalle de* **R**, *non réduit à un point, possède la puissance du continu*. Par exemple, $]\!]0, 1[\![$ est équipotent à **R** car l'application $x \mapsto 1/x + 1/x - 1$ est bijective de $]\!]0, 1[\![$ sur **R**. Nous voyons donc que **R** possède deux types de sous-ensembles :

1) des ensembles dénombrables finis ou non, par exemple $\{1, 2, 3, 4\}$, **Z** ou **Q** ;
2) des ensembles ayant la puissance du continu, par exemple $]\!]0, 1[\![$.

On peut alors poser la question suivante : existe-t-il dans **R** des sous-ensembles infinis non dénombrables et n'ayant pas la puissance du continu ?

Cette question est appelée *problème du continu*. En d'autres termes : *existe-t-il un cardinal α tel que* :

$$\aleph_0 < \alpha < \mathfrak{c}.$$

On appelle *hypothèse du continu* la conjecture faite par Cantor affirmant que la réponse à cette question est négative.

Remarque. — Soit $I = [\![0, 1]\!]$; on peut montrer que le carré $I \times I$ est en correspondance bijective avec le segment I. Ce résultat peut peut-être surprendre ; mais il faut savoir qu'il n'existe aucune bijection *continue* du carré $I \times I$ sur le segment I.

5. **Au-delà de la puissance du continu.** — On peut démontrer qu'étant donné un ensemble infini E, il existe une injection de **N** dans E ; donc $\aleph_0 \leqslant \text{Card } E$. En d'autres termes, $\aleph_0$ *est le plus petit des cardinaux infinis*. Nous savons déjà qu'il existe des cardinaux strictement supérieurs à $\aleph_0$, comme $\mathfrak{c}$. Mais le théorème de Cantor nous permet d'affirmer qu'il existe des cardinaux strictement supérieurs à $\mathfrak{c}$, puisque :

$$2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$$

et, de façon plus générale, *pour tout cardinal* $\mathfrak{a}$ *il existe un cardinal* $2^{\mathfrak{a}}$ *qui lui est strictement supérieur*.

On appelle *hypothèse du continu généralisée* l'affirmation que pour tout cardinal infini $\mathfrak{a}$, il n'existe pas de cardinal α tel que $\mathfrak{a} < \alpha < 2^{\mathfrak{a}}$. En fait nous savons, depuis 1962, à la suite des travaux de Cohen, qu'il s'agit là d'un *problème indécidable* et que l'on peut prendre comme axiome supplémentaire de la théorie des ensembles ou bien l'hypothèse de Cantor ou bien sa négation. Nous parlerons plus longuement de ceci dans le prochain chapitre.

On note traditionnellement $\aleph_1$ le plus petit des cardinaux $> \aleph_0$, puis $\aleph_2$ le plus petit des car-

dinaux $> \aleph_1$, etc. Prendre comme axiome l'hypothèse du continu revient donc à exiger que $\aleph_1 = \mathfrak{c} = \text{Card}\,\mathbf{R}$.

Le tableau ci-dessous indique le cardinal de certains ensembles usuels. Notons, par exemple, que si l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des fonctions réelles de variables réelles a pour cardinal $2^{\mathfrak{c}}$, l'ensemble $\mathscr{C}(\mathbf{R}\,;\mathbf{R})$ des fonctions continues de **R** dans **R** a la puissance du continu et l'ensemble $\mathbf{Q}[x]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.

$\aleph_0$	$n\mathbf{N}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$, $n\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}[x]$
$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$	$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, $[\![0, 1]\!]$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{C}$, $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$, $\mathscr{C}(\mathbf{R}\,;\mathbf{R})$, $\mathbf{R}[x]$
$2^{\mathfrak{c}}$	$\mathfrak{P}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$; $[\![0, 1]\!]^{\mathbf{R}}$
⋮	⋮

La découverte de la *théorie des cardinaux*, notamment de l'existence d'une infinité de *types d'ensembles* infinis, est une des découvertes les plus remarquables du début de ce siècle. Avant les travaux de Cantor, nul n'avait osé penser que l'on puisse toujours trouver un ensemble strictement « *plus grand* » que tout ensemble infini donné, ni que l'on puisse comparer et classer les ensembles infinis.

L'algèbre des cardinaux infinis se développe par des arguments de même nature que ceux que nous avons utilisé plus haut pour étudier $\aleph_0 + \aleph_0$ ou $\aleph_0^2$. On vérifie ainsi qu'étant donné un cardinal infini $\mathfrak{a}$, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$n + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,;$$
$$n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}\,;$$
$$2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

En particulier donc :

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \quad \text{et} \quad \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}.$$

Nous en arrivons là à l'étude de cardinaux de plus en plus grands et à leur classification.

A ce sujet, voir par exemple A. Bouvier et M. George, sous la direction de F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, 1979, en particulier aux articles : Aleph, Cantor, Cardinal, Continu, Inaccessible, Mesurable, Régulier, Singulier, Transfini.

III. — Ordinaux

Introduite par Cantor à la même époque que la notion de cardinal (c'est-à-dire vers 1897), la notion d'ordinal occupe une place centrale en théorie des ensembles, d'autant plus que repose sur elle, dans beaucoup de traités, la définition des cardinaux.

Alors que les cardinaux permettent de donner du sens, pour les ensembles quelconques, à une certaine idée de « quantité d'éléments » et généralisent aux ensembles infinis la notion du nombre d'éléments d'un ensemble fini, les ordinaux privilégient l'ordre des éléments et veulent marquer, par exemple, que le cinquième élément est celui qui suit le quatrième.

Dans ce paragraphe nous nous bornerons seulement à esquisser en quoi consiste la théorie des ordinaux.

Considérons l'ensemble $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Dans cet ensemble, l'appartenance est une relation d'ordre qui, en fait, est une relation de bon ordre. De plus, l'ensemble E jouit de la propriété remarquable suivante :

$$x \in E \quad \text{entraîne} \quad x \subset E.$$

Plus généralement, un ensemble α est appelé *un ordinal* s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) • la relation d'appartenance est un bon ordre dans α ;

(2) • si $x \in \alpha$, alors $x \subset \alpha$.

Par exemple, les ensembles suivants sont des ordinaux :

$$\varnothing ; \quad \{\varnothing\} ; \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\} ; \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

— Les ordinaux possèdent des propriétés remarquables que nous citons maintenant.

• Tous les éléments d'un ordinal α sont eux aussi des ordinaux et $\alpha \notin \alpha$.

• Etant donné un ordinal α, l'ensemble $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal, donc $\alpha \cup \{\alpha\} \cup \{\alpha \cup \{\alpha\}\}$ aussi, etc.

• Etant donné deux ordinaux α et β, on a $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ et ces trois propriétés s'excluent mutuellement.

• Entre ordinaux, l'appartenance est une relation de bon ordre et $\varnothing$ est le plus petit ordinal.

• Les ordinaux, comme les cardinaux, ne forment pas un ensemble.

— Etant donné un ordinal α, le plus petit ordinal strictement supérieur à α est appelé son *successeur* ; on le note $\alpha + 1$ et :

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

— Lorsqu'un ordinal β est le successeur d'un ordinal α, on dit encore que α est le *prédécesseur* de β. Si tout ordinal possède un successeur, par contre un ordinal n'admet pas nécessairement de prédécesseur.

— On note habituellement 0 l'ordinal $\varnothing$, puis 1 son successeur, 2 le successeur de 1 et :

$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

— De la même façon que l'on peut associer un cardinal unique à tout ensemble donné, on démontre que tout ensemble bien ordonné E est isomorphe (en tant qu'ensemble ordonné) d'une façon et d'une seule à un ordinal α appelé l'ordinal de l'ensemble bien ordonné E.

— Indiquons maintenant les liens entre ordinaux et cardinaux. On appelle *cardinal* tout ordinal α qui n'est équipotent à aucun ordinal $\beta < \alpha$.

— Un ordinal α est dit *fini* si tout ordinal non vide β et inférieur ou égal à α possède un prédécesseur. On peut vérifier que *tout ordinal fini est un cardinal.*

— Il existe un ordinal qui n'est pas fini ; on dit qu'il est *infini*. On désigne par ω (ou parfois par N) le premier ordinal infini :

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\} = \bigcup_{n < \omega} n.$$

— Il existe d'autres ordinaux infinis comme $\omega + 1$ ou $(\omega + 1) + 1 = \omega + 2, \ldots$ ou le plus petit ordinal strictement plus grand que tous les $\omega + n$ (on le note $\omega + \omega$ ou $\omega . 2$). On définit ainsi $\omega . 3$, $\omega . 4, \ldots$ puis $\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\omega$, etc.

— *Remarque.* — Si l'on pense à ω comme à l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ où $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, on peut penser à $\omega + 1$ comme à l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0\}$ où $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_0$, à $\omega + 2$ comme à l'ensemble $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1\}$ où $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_0 < b_1$, à $\omega . 3 + 1$ comme à l'ensemble $\{a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots, d_0\}$ avec :

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < d_0.$$

— Un ordinal, comme ω, $\omega . 2$, $\omega . 3$, $\ldots$, ω^2, qui n'a pas de prédécesseur, est appelé un ordinal *limite*.

Les ordinaux ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ou $\omega.2$, etc. sont distincts ; on peut même préciser que :

$$\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots < \omega.2 < \omega.2 + 1 < \omega.2 + 2 < \ldots < \omega.3 < \omega.3 + 1 < \ldots$$

— Bien que distincts, ***les ordinaux précédents sont équipotents entre eux et dénombrables.*** Le plus petit ordinal infini non dénombrable se note parfois Ω. Il joue un rôle important en théorie des ensembles : c'est un cardinal que l'on note plus souvent $\aleph_1$. On pose encore :

$$\omega^2 = \omega \cup \omega.2 \cup \omega.3 \cup \ldots \cup \omega.n \cup \ldots$$

et $$\omega^\omega = \omega \cup \omega^2 \cup \omega^3 \cup \ldots \cup \omega^n \cup \ldots$$

Comme pour les cardinaux, l'étude des ordinaux de plus en plus grands se situe au centre de la théorie des ensembles au sens qu'on lui donne aujourd'hui : étude et classification de cardinaux et d'ordinaux de plus en plus grands ; problèmes d'existence de certains « grands » cardinaux, etc. Nous invitons les lecteurs qui voudraient plus de détails sur ce sujet à consulter *Basic set theory* par A. Lévy, Springer-Verlag.

Chapitre VI

DE LA THÉORIE NAÏVE AUX THÉORIES FORMELLES

I. — Les origines de la théorie des ensembles

1. Des problèmes d'analyse. — Une idée répandue dans le public voudrait que la théorie des ensembles ne soit due qu'au génie de Cantor et que ce dernier ait spontanément (on ne sait à la suite de quelle inspiration) décidé d'en faire l'étude. En fait, à la fin du XVIIIe siècle, les analystes s'aperçurent que plusieurs démonstrations demeuraient insatisfaisantes faute d'une construction précise du corps des nombres réels. Il importait donc d'en dégager une présentation rigoureuse.

Différentes solutions furent apportées, d'abord par Weierstrass, Dedekind, Cauchy et Cantor. Pour cela, il fallait utiliser certains *ensembles de points*, sur ces derniers effectuer des *opérations*, considérer des successions de tels ensembles, de telles opérations et en déduire les résultats cherchés. Les mathématiciens du milieu du XIXe siècle furent donc tout naturellement amenés, par le biais de l'analyse, à étudier systématiquement les *ensembles de points*.

En particulier se posèrent des questions sur les fonctions exceptionnelles et les séries trigonométriques qui, depuis les travaux de Riemann, pas-

sionnaient les chercheurs et les conduisaient à considérer certains *ensembles de points* particuliers, par exemple liés à la convergence de séries.

En s'attaquant à de tels problèmes d'analyses, Bolzano, Dedekind et Cantor allaient trouver les premiers résultats de théorie des ensembles de points et développer la *théorie des ensembles*. « La création cantorienne se caractérise par son intime subordination à l'analyse » (Cavaillès) et, jusqu'en 1930 environ, la topologie englobait la théorie des ensembles. Nous ne développerons pas plus ce point ; dans ce qui suit, nous indiquons seulement quelles furent, de cette époque à nos jours, les grandes étapes de la création de la théorie des ensembles.

2. **Dedekind — Cantor.** — Euclide (315 ?-255 ? avant J.-C.) avait énoncé comme axiome : « le tout est plus grand qu'une de ses parties ». Galilée mit en évidence l'*inexactitude de cette assertion pour les ensembles infinis* : « la ligne plus longue ne contient pas plus de points que la ligne plus courte » ; « les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas de sens pour les quantités infinies mais seulement pour les quantités finies ». Mais il ne retira pas profit de cette découverte. Cauchy, deux siècles plus tard, s'appuya sur ces idées de Galilée pour justifier la méfiance que les mathématiciens devaient avoir de l'infini et n'essaya pas plus d'examiner ce phénomène.

Bolzano étudia l'équipotence des intervalles fermés de **R**. Il démontra que *tous les intervalles fermés* (non réduits à un point) *sont équipotents à* **R**, puis énonça comme propriété caractéristique d'un ensemble infini de pouvoir être équipotent à l'une de ses parties propres. Ce résultat figure dans un

ouvrage posthume datant de 1851 et dans un mémoire de Dedekind publié en 1888, regroupant des travaux entrepris par ce dernier depuis 1872.

A la suite de ses recherches sur les séries trigonométriques et le corps des nombres réels (dont il donna une construction reposant sur la notion de « suites de Cauchy »), Cantor commença à s'intéresser systématiquement à des problèmes de théorie des ensembles, au sens où nous l'entendons aujourd'hui. A cette époque, il correspondait régulièrement avec Dedekind pour lui soumettre ses résultats.

Le premier problème fondamental de théorie des ensembles que Cantor chercha et réussit à résoudre fut celui de l'équipotence de **N** et de **Q**. Puis successivement il établit la non-équipotence de **N** et de **R**, et l'équipotence de **R** et de $\mathbf{R}^n$ (où n est un entier supérieur ou égal à 1). C'est alors qu'il publia ses travaux dont certains dataient de plusieurs années. Continuant ses efforts, Cantor allait faire de grandes découvertes : il démontra notamment que pour tout ensemble E, on a $\text{Card}\ \mathfrak{P}(E) = 2^{\text{Card}\ E}$ et $\text{Card}\ E < \text{Card}\ \mathfrak{P}(E)$.

Ce résultat est peut-être sa découverte la plus remarquable. « Une théorie de l'infini est fondée » (Cavaillès). Jusqu'à lui, on connaissait l'existence d'ensembles infinis, mais bien que ces derniers fussent le sujet de nombreuses discussions, comme nous l'avons vu, la méfiance des mathématiciens en avait empêché l'étude. Le théorème de Cantor cité ci-dessus prouve qu'*il existe plusieurs « types » d'ensembles infinis et que l'on peut toujours trouver un ensemble infini « plus grand » que n'importe quel ensemble infini donné.* On doit à Cantor la notion de cardinal, d'ordinal, d'ensemble bien ordonné, la formulation du problème du continu, etc. Il dut lutter contre l'incompréhension de la majeure partie

de ses contemporains et contre les tourments d'une maladie nerveuse (accentuée par cette incompréhension quasi générale dont il était l'objet). Cette maladie devait avoir raison de son génie bien avant sa mort (survenue en 1918) et interrompre de bonne heure (vers 1897) sa production mathématique. Mais avant que les tourments ne l'empêchent de travailler, le volume et la qualité de ses travaux furent considérables et sa puissance de création tout à fait remarquable. « C'est au génie de G. Cantor qu'est due la création de la théorie des ensembles telle qu'on l'entend aujourd'hui » (Bourbaki). Il reçut toutefois de Weierstrass (dont il fut l'élève) une « bienveillante compréhension » et Dedekind l'encouragea lors de leurs rencontres et dans les lettres qu'ils échangèrent. Enfin on peut noter que ses adversaires les plus acharnés, tels Poincaré, utilisèrent néanmoins, sans restriction, les résultats d'analyse obtenus par Cantor grâce à la théorie des ensembles qu'ils contestaient vivement.

3. **Les paradoxes.** — Un coup sérieux allait être porté au prestige de la théorie des ensembles par la découverte des « paradoxes ».

En 1897, Burali Forti découvrit celui auquel on donne aujourd'hui son nom, montrant que l'ensemble des ordinaux est dépourvu de sens. Cantor fit la même constatation et s'aperçut que « l'ensemble de tous les ensembles » et « l'ensemble des cardinaux » ne peuvent « exister » sans conduire à des contradictions ; en effet :

1) Soit U l'ensemble de tous les ensembles. Les éléments de $\mathfrak{P}(U)$ sont des ensembles, donc des éléments de U. Cela montre que $\mathfrak{P}(U)$ est un sous-ensemble de U et donc :

$$\text{Card } \mathfrak{P}(U) \leqslant \text{Card } U.$$

Mais d'après un théorème de Cantor on a :

$$\text{Card } U < \text{Card } \mathfrak{P}(U),$$

d'où une contradiction.

2) Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble de tous les cardinaux et soit A leur réunion. Puisque $2^{\text{Card } A}$ est un cardinal, c'est un sous-ensemble de A. On aurait donc $2^{\text{Card } A} < \text{Card } A$, ce qui contredit à nouveau le théorème de Cantor.

En 1905, Bertrand Russell, mathématicien et philosophe anglais (prix Nobel de littérature en 1950), publia le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Soit :

$$Z = \{X ; \ X \notin X\}.$$

Posons-nous la question suivante : Z appartient-il ou non à lui-même ?

— Si $Z \in Z$ par définition de Z, l'ensemble Z étant un élément de lui-même n'appartient pas à Z.

— Si $Z \notin Z$ par définition de Z, l'ensemble Z n'étant pas un élément de lui-même appartient à Z.

Cette situation apparaît comme antinomique. Ce paradoxe s'est popularisé sous le nom de *paradoxe du barbier* : dans un village, le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes ; se rase-t-il ?

Ces paradoxes établissent qu'étant donné une propriété P, les éléments vérifiant cette propriété ne constituent pas nécessairement un ensemble, d'où la nécessité, dans les théories formalisées, d'introduire un axiome (l'axiome de remplacement) qui garantit que certaines propriétés « raisonnables » définissent des ensembles.

On raconte que Russell avait exposé son paradoxe dans une lettre à Frege alors que celui-ci était sur le point de publier un important travail d'arithmétique utilisant la théorie intuitive des ensembles

selon Cantor. Après avoir pris connaissance de cette lettre, Frege laissa éditer son mémoire, mais en affirmant qu'il était sans doute bon à mettre au pilon.

La découverte des paradoxes de la théorie des ensembles donna naissance à la *crise* la plus profonde de l'histoire des mathématiques. Les « détracteurs » de cette nouvelle théorie, impressionnés par les antinomies, préféraient rejeter en bloc toute la théorie. En fait, la crise n'avait pas pour seule cause la découverte des paradoxes ; la mise en évidence et l'utilisation de *l'axiome du choix* donnèrent naissance à des polémiques dont on pouvait encore sentir les répercussions jusqu'au milieu du XXe siècle.

II. — L'axiome du choix

1. Présentation. — Même les mathématiciens qui prenaient prétexte de la mise en évidence des paradoxes pour rejeter la théorie des ensembles savaient bien (mais sans le dire) qu'une étude sérieuse de la cause et de la nature de ces antinomies pourrait permettre de les éliminer par l'utilisation d'un formalisme adéquat. La crise provoquée par l'axiome du choix était de nature différente.

Cet axiome fut utilisé *explicitement* pour la première fois par Beppo-Lévi en 1902 ; puis Zermelo (1904) l'introduisit pour démontrer le *théorème du bon ordre*, dont nous parlerons plus loin. On constata alors que, dégagé nulle part, il était utilisé en analyse dans beaucoup de démonstrations. Il fut néanmoins rejeté par de nombreux mathématiciens.

Ces derniers se séparèrent en deux tendances principales.

Aux *formalistes* Hilbert, Zermelo, Fraenkel, von Neumann, s'opposaient les *empiristes* Poincaré, Borel (qui niait la validité de l'axiome du choix), Baire (niant l'existence de l'ensemble des parties d'un ensemble infini donné), Hadamard, Lebesgue (contestant le sens donné par Cantor au mot *existence* en mathématique) et surtout Brouwer qui créa l'école *intuitionniste*. Les mathématiciens du début du XXe siècle prirent parti pour l'une de ces tendances ou restèrent dans l'expectative, préférant attendre que la situation se décante avant de publier certains travaux, comme ce fut le cas pour Dedekind.

Les empiristes rejetaient l'axiome du choix car il permet d'affirmer l'existence d'êtres mathématiques (comme un bon ordre sur **R**) que l'on ne peut construire explicitement. On sait aujourd'hui que de nombreux résultats dont la preuve fait appel à l'axiome du choix, non seulement ne peuvent être démontrés sans cet axiome, mais en fait lui sont logiquement équivalents ; c'est le cas, entre autres, du théorème de Zorn, du théorème de Zermelo (voir plus loin) ou du théorème de Tarski (1924) : pour tout cardinal infini $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.

On peut, bien sûr, décider de se passer de son usage ; mais du même coup c'est renoncer aux résultats les plus profonds de la mathématique contemporaine et souvent de la mathématique traditionnelle.

2. Utilisation pratique. — Nous allons essayer de montrer sur un exemple de quelle façon l'axiome du choix intervient dans certaines démonstrations.

Théorème. — Soit f une application surjective de E sur F ; il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = I_F$.

Démontrons ce résultat. Soit y un élément de F. L'application f étant surjective, il existe un élément x dans E tel que $y = f(x)$. Posons $x = g(y)$.

Alors $y \to g(y)$ est une application f de F dans E, et l'on voit aisément que $f \circ g = I_F$ car :

$$y = f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y).$$

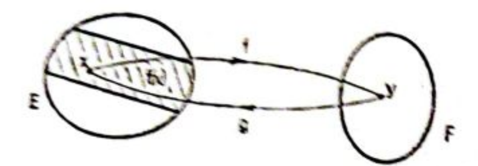


Fig. 73

Telle que, cette démonstration est en fait incomplète ; lorsque nous affirmons qu'il existe un élément x dans E tel que $y = f(x)$, nous affirmons que :

$$\overset{-1}{f}(y) = \{x ; x \in E \quad \text{et} \quad y = f(x)\}$$

n'est pas vide ; mais cet ensemble peut être éventuellement *infini non dénombrable* et pour construire l'application g en posant $x = g(y)$, il nous faut « extraire » un élément et un *seul* de cet ensemble et faire de même pour tous les ensembles $\overset{-1}{f}(y)$ (il peut y avoir éventuellement un nombre infini de tels ensembles). Par exemple, étant donné une surjection $f : \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, comment trouver g ? En d'autres termes, il faudrait pouvoir faire un *choix simultané d'un nombre infini de termes.* C'est la possibilité d'effectuer un tel choix (que l'on peut faire de façon simple pour les ensembles finis) qui fut niée par des mathématiciens tels Lebesgue.

En revenant au théorème nous pourrions construire effectivement g, si nous pouvions affirmer qu'étant donné une partition $(A_i)_{i \in I}$ de E il existe un sous-ensemble B de E dont l'intersection avec chaque A_i est réduite à un élément a_i et un seul (fig. 74). *Seul l'axiome du choix permet une telle affirmation.*



Fig. 74

Dans des cas particuliers, lorsque l'ensemble E est bien ordonné, comme $\mathbf{N}$ par exemple, on peut construire g *sans utiliser* l'axiome du choix. Etant donné une surjection $F : \mathbf{N} \to F$ et $y \in F$, on peut décider que $g(y) \in \mathbf{N}$ est le plus petit élément du sous-ensemble non vide $\overset{-1}{F}(y)$ de $\mathbf{N}$.

Donnons maintenant les trois énoncés les plus courants de l'axiome du choix :

1) Pour tout ensemble E non vide, il existe une application f de $\mathfrak{P}(E)$ dans E tel que si X n'est pas vide, $f(X)$ appartient à X. La fonction f est alors appelée une *fonction de choix de E.*

2) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition d'un ensemble E, il existe un sous-ensemble B de E tel que chaque A_i ait un seul élément en commun avec B. L'ensemble B est alors appelé *un ensemble de choix de E.*

3) Le produit d'un nombre infini d'ensembles non vides est non vide.

On peut vérifier que ces trois énoncés sont équivalents.

Par exemple, si $E = \mathbf{N}$ on obtient une fonction de choix à l'aide de l'application qui à toute partie non vide de E associe son plus petit élément.

Remarque. — Nous avons démontré le théorème précédent en utilisant l'axiome du choix. En fait, ce *théorème lui est logiquement équivalent.* Si on l'admet, il permet de démontrer l'axiome du choix. En effet, soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E. L'application $f : E \to I$ définie par $f(x) = i$ si $x \in A_i$ est surjective. Donc il existe $g : I \to E$ telle que

$f \circ g = 1_I$. Alors $C = g(I)$ est un ensemble de choix : une vérification immédiate permet de voir que pour tout $i \in I$

$$A_i \cap G = \{g(i)\}.$$

3. Théorème de Zermelo. Théorème de Zorn. — On dit qu'un ensemble est *bien ordonné* par une relation d'ordre $\prec$ si toute partie non vide de cet ensemble possède un plus petit élément.

Dans un ensemble bien ordonné, une paire d'éléments $\{x, y\}$ possède donc un plus petit élément x ou y et l'on a $x \prec y$ ou $y \prec x$. C'est-à-dire que cet ensemble est totalement ordonné.

Exemple d'ensemble bien ordonné : l'ensemble **N** est bien ordonné par sa relation d'ordre naturelle. Mais le divisibilité dans **N** n'est pas un bon ordre puisque cet ordre n'est pas total.

Réciproquement, une relation d'ordre total n'est pas nécessairement une relation de bon ordre. L'ordre usuel dans **R** est un ordre total mais n'est pas un bon ordre ; par exemple $]0, 1]$ est non vide et ne possède pas de plus petit élément.

Conjecturé par Cantor (1883) et démontré par Zermelo (1904), *le théorème du bon ordre dit théorème de Zermelo* affirme que : *Tout ensemble peut être bien ordonné.*

Il est plus délicat de présenter le théorème de Zorn (1935). Il s'applique aux *ensembles inductifs* qui sont des ensembles ordonnés dans lesquels toute chaîne est majorée. Le *théorème de Zorn* affirme : *Soit E un ensemble inductif et a un élément de E ; il existe au moins un élément maximal dans E supérieur ou égal à a.*

Ce théorème est d'un usage permanent en mathématique. Par exemple, il permet de démontrer le théorème de Krull (dans un anneau commutatif, tout idéal est contenu dans un idéal maximal), le théorème de Steinitz (tout corps commutatif possède une clôture algébrique), l'existence d'une base dans un espace vectoriel, d'ultrafiltres, de famille orthogonale totale d'un espace hilbertien, de solution maximale de certaines équations différentielles, etc. Sa démonstration repose également sur *l'axiome du choix*. Mais en fait : *le théorème de Zorn, le théorème de Zermelo et l'axiome du choix sont logiquement équivalents.* Par conséquent, on ne peut pas nier l'un sans nier les autres.

III. — Axiomatiques de la théorie des ensembles

1. Les différentes écoles. — Euclide choisit ses axiomes de la géométrie et ses « notions communes » les plus *intuitives* possibles et de telle sorte que l'*on puisse retrouver, à partir de cette base, les théorèmes de ses prédécesseurs.*

Les mathématiciens du début du xxe siècle, considérant la théorie des ensembles comme pierre de base de toute la mathématique, s'étaient fixé le même but : construire une théorie qui permette de retrouver, *sans renoncer à rien*, tous les résultats de la mathématique classique : « du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser » (Hilbert). Mais il fallait que l'axiomatique envisagée supprime les paradoxes qui avaient partagé les mathématiciens en plusieurs clans.

Les deux principales axiomatiques de la théorie des ensembles sont celles de Zermelo-Fraenkel et de von Neumann-Bernays-Gödel. Leur premier mérite est d'éliminer les paradoxes ; elles fournissent (notamment celle de Zermelo-Fraenkel) des théories formelles mathématiquement satisfaisantes et assez proches de la théorie intuitive de Cantor. Mais on

peut trouver différents modèles qui satisfont les axiomes de ces théories.

Parallèlement aux travaux des formalistes, Brouwer — et son école intuitionniste — s'attaqua à une refonte *totale* des mathématiques. Il refusait d'utiliser le principe du tiers exclu, l'axiome du choix, le formalisme, n'acceptant que les démonstrations dont les chaînons sont intuitifs ou évidents pour tout le monde et adoptant une attitude sévère à propos de « l'existence » des êtres mathématiques. Finalement, les résultats de la mathématique intuitionniste sont éloignés de ceux de la mathématique classique la plus usuelle. Par exemple, dans **R** il y a *deux* notions de convergence pour les suites et si a et b sont deux nombres réels tels que $a.b = 0$, on ne peut pas conclure que a ou b est nul ; toute fonction d'une variable réelle est nécessairement continue, etc. Considérés aujourd'hui sans lendemain (« curiosité historique », dit Bourbaki), les efforts des mathématiciens de cette école n'ont pas été dépourvus d'utilité puisqu'ils ont obligé tous leurs contemporains à faire preuve de la plus grande vigilance, même dans les domaines réputés les plus sûrs.

2. Kurt Gödel — Paul Cohen. — On ignore si les deux systèmes d'axiomes dont nous avons parlé plus haut sont ou non contradictoires. Toutefois certains résultats fondamentaux ont été démontrés. Gödel établit, en 1938, le célèbre théorème montrant que si les axiomes de la théorie des ensembles de von Neumann-Bernays, privés de l'axiome du choix, sont non contradictoires, l'axiome du choix (sous l'une de ses formes les plus fortes) et l'hypothèse générale du continu peuvent leur être adjoints sans donner lieu à une contradiction. Un grand pas venait d'être franchi, d'autant plus que l'on sait maintenant que la non-contradiction de l'une des deux théories entraîne la non-contradiction de la seconde.

En 1939, Gödel établit que l'on ne pouvait pas démontrer l'inexactitude de l'hypothèse du continu et, en 1962, Paul Cohen, un élève de Gödel, démontra que l'*hypothèse du continu est indécidable*, c'est-à-dire que l'on peut ajouter indifféremment comme axiome à la théorie des ensembles l'hypothèse du continu ou sa négation. Ce travail remarquable lui valut de recevoir la médaille Fields (équivalent du prix Nobel pour les mathématiques) à Moscou en 1966.

3. Les théories des ensembles. — On se trouve aujourd'hui exactement dans la situation rencontrée au XIXe siècle lorsque apparurent les différentes géométries non euclidiennes. *Il y a en présence plusieurs théories des ensembles.* Certains nomment *théorie des ensembles cantoriens* celle ayant pour axiomes le système de Zermelo-Fraenkel ou de von Neumann-Bernays-Gödel, y compris l'axiome du choix et l'hypothèse du continu, et l'on appelle *théories des ensembles non cantoriens* les théories qui prennent pour base les axiomes restreints de l'un ou l'autre système, plus une négation de l'axiome du choix, ou de l'hypothèse du continu (ou les deux). A la différence des géométries non euclidiennes, les théories des ensembles non cantoriens demeurent encore dépourvues d'*applications pratiques* ; mais il est bien évident qu'une telle remarque ne diminue en rien l'intérêt et le profit que l'on peut tirer de leurs études.

En fait, l'axiome du choix ne fut pas le seul axiome de la théorie des ensembles à provoquer des débats passionnés et à partager les mathématiciens. Il en fut de même, par exemple, de l'axiome

de l'ensemble des parties d'un ensemble et de l'axiome de l'infini.

Aujourd'hui, on sait mieux quelle mathématique on peut espérer bâtir à partir d'une axiomatique donnée et les mathématiciens semblent adopter l'attitude pragmatique suivante : les axiomatiques comme celle de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix permettent de retrouver les résultats essentiels des mathématiques et se prêtent à un développement satisfaisant de cette discipline. Certes, les problèmes de fondements ne sont pas tous résolus ; mais s'il arrivait que l'on obtienne un jour un résultat contradictoire il serait temps de modifier un ou plusieurs des axiomes choisis pour supprimer cette contradiction. Quant à l'étude logique des différentes axiomatiques, de leur contradiction, de leurs modèles, etc., c'est devenu une spécialité en elle-même, appelée parfois *métamathématique*.

4. La métamathématique. — A la suite de la publication par Bertrand Russell et Whitehead de leur ouvrage *Principia Mathematica*, les mathématiciens s'attachèrent à explorer la *nature* profonde des paradoxes et des axiomes de la théorie des ensembles.

Si l'on veut une maison solide, avant de la construire, il faut s'assurer que ses fondations sont suffisantes. L'exemple de la tour de Pise prouve que, dans certains cas, les fondations elles-mêmes peuvent ne pas suffire à assurer l'équilibre de l'édifice. Pour bien faire, il faudrait construire des « préfondations » destinées à soutenir les fondations et étudier en détail les techniques de construction pour les perfectionner au maximum.

La base de toute la mathématique contemporaine est la théorie des ensembles, qui demeure inachevée. L'étude du fondement des mathématiques reste des

plus délicates ; il faut utiliser un langage courant (le langage ordinaire) peu ou mal formalisable, décider de ce qu'est une démonstration et bâtir de toutes pièces une *théorie de la démonstration*, la *métamathématique*, destinée à fournir aux mathématiciens les règles de maniement de leurs symboles abréviateurs et de leurs *critères déductifs*. Le pionnier en ce domaine fut Hilbert, qui se pencha sur les fondements de l'arithmétique et de la géométrie.

Le tableau suivant offre une comparaison des étapes du développement de la géométrie et de la théorie des ensembles.

Etapes du développement	Géométrie	Théorie des ensembles
Bases intuitives Premiers résultats	Thalès Pythagore Théétète	Bolzano Dedekind Cantor
Découverte des paradoxes	Zénon	Burali-Forti Cantor Russel
Bases axiomatiques de la théorie naïve	Eudoxe Euclide	Zermelo-Fraenkel von Neumann-Bernays
Etude de l'indépendance des axiomes	Hilbert	Gödel
Découverte des théories non classiques	Gauss Riemann Lobatchevsky	Cohen
Applications des nouvelles théories	Minkowski Einstein	?

Alors qu'il fallut vingt-cinq siècles à la géométrie pour parcourir ces six étapes, la théorie des ensembles le fit en 150 ans ! Ceci tient, en partie, à la formidable accélération générale de la science ; néanmoins il y avait matière à troubler certains.

5. L'axiomatique de Zermelo-Fraenkel. — Pour l'énoncer nous utilisons la donnée du formalisme suivant (certains signes sont superflus) :

$=$ est égal à.	$\subset$ est inclus dans.
$\neg$ non.	$\Leftrightarrow$ si et seulement si.
$\in$ appartient à.	$\vee$ ou.
$\notin$ n'appartient pas à.	$\wedge$ et.
$\varnothing$ ensemble vide.	$\forall$ pour tout.
$\cup$ réunion.	$\exists$ il existe.
$\Rightarrow$ implique.	$\exists!$ il existe un seul.

Dans le système Z-F (i.e. Zermelo-Fraenkel), les êtres mathématiques considérés sont tous des ensembles ; on les note avec des minuscules. Si $x \in y$, on dit que « x est un élément de y ». Les axiomes donnent des *relations* entre certains êtres ; ce sont les règles de fonctionnement.

Bien qu'il puisse être présenté avec moins d'axiomes, nous donnons maintenant une axiomatique en neuf axiomes de Z.F.C. (i.e. Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix).

A) *Axiome d'extentionalité.* — Deux ensembles formés des mêmes éléments sont égaux :

$$(\forall x)(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow (a = b).$$

B) *Axiome de l'ensemble vide.* — Il existe un ensemble (on l'appelle *ensemble vide*) qui ne possède aucun élément :

$$(\exists x)\ (\forall y)\ (y \notin x).$$

C) *Axiome des paires* (Zermelo, 1908). — Etant donné deux ensembles, il existe un ensemble dont ils sont les seuls éléments :

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (\forall w)\ (w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

D) *Axiome de la réunion* (Cantor, 1899. Zermelo, 1908). — Si x est un ensemble, la réunion de tous ses éléments est encore un ensemble :

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (z \in y \Leftrightarrow (\exists t)\ (z \in t \wedge t \in x)).$$

E) *Axiome de l'infini* (Zermelo, 1908). — Il existe un ensemble x contenant l'ensemble vide et tel que si y appartient à x alors la réunion de y et de $\{y\}$ est aussi dans x. C'est cet axiome qui garantit l'existence des ensembles infinis :

$$(\exists x)\ (\varnothing \subset x \wedge (\forall y)\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

F) *Axiome des parties d'un ensemble.* — Pour tout ensemble x, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de x :

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (z \in y \Leftrightarrow z \subset x).$$

G) *Axiome de régularité.* — Il interdit que l'on puisse avoir $x \in x$:

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (x = \varnothing \vee (y \in x \wedge (\forall z)\ (z \in x \Rightarrow z \notin y))).$$

H) *Axiome du choix.* — Si a est un ensemble d'ensembles non vides deux à deux disjoints, il existe un ensemble c ayant un, et un seul élément, en commun avec chaque élément de a.

I) *Axiome de remplacement* (Fraenkel, 1922. Skolem, 1923). — C'est celui qui est le plus délicat à exprimer. Il affirme que toute propriété « raisonnable » peut servir dans le langage formalisé de la théorie à définir un ensemble : l'ensemble des êtres possédant la propriété citée. Son expression formalisée est la suivante :

$$(\forall u)(\forall v)(\forall w)(\psi(u, v) \wedge \psi(u, w) \Rightarrow v = w)$$
$$\Rightarrow (\forall z)(\exists y)(\forall v)(v \in y \Leftrightarrow (\exists u \in z)\ \psi(u, v))$$

où $\psi(u, v)$ est une formule où n'apparaissent pas y, z et w.

En théorie des ensembles cantoriens, on ajoute un dixième axiome :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

mais on pourrait tout aussi bien prendre comme dixième axiome :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_{13},$$

puisque Cohen a montré que l'on peut, pour tout entier $n \geqslant 1$, construire un modèle de la théorie des ensembles dans lequel :

$$2^{\aleph_0} = \aleph_n.$$

Afin de pouvoir étudier « tous les ensembles », « tous les groupes », etc., von Neumann (1925) et Bernays (1937) proposèrent une autre axiomatique dans laquelle :

— Tous les êtres mathématiques considérés sont appelés des *classes*. Certaines classes particulières s'appellent *ensembles* : un ensemble est un élément d'une classe. En d'autres termes, il est équivalent de dire « x est un ensemble » ou « x appartient à une classe y ». Le premier axiome de la théorie de von Neumann-Bernays-Gödel s'exprime ainsi : Si $M(x)$ signifie « x est un ensemble », alors :

$$(x \in y) \rightarrow (M(x)).$$

— Le second axiome donne la définition de l'égalité de deux classes ; c'est l'axiome du système Z-F étendu des ensembles aux classes.

— Puis les sept axiomes suivants concernent les ensembles. Ce sont les axiomes du système Z-F.

— Enfin le système est complété par huit axiomes de formation des classes.

En guise de conclusion, citons Jean Leray :

« Cette rigueur absolue que la théorie des ensembles donne aujourd'hui à l'édifice mathématique n'est peut-être qu'une illusion temporaire : comme Henri Lebesgue le prouvait par de nombreux exemples, la rigueur progresse de génération en génération et, peut-être, les raisonnements que nous croyons aujourd'hui exacts se révéleront-ils demain insuffisants ».

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

• Reprenant le même sujet, en plus développé, mais demeurant élémentaire :

K. Hrbacek et T. Jech, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, 1978.

• Présentant des compléments sur des domaines évoqués :

— *Logique :*

L. Carroll, *Logique sans peine*, Hermann.

— *Algèbre de Boole :*

Casanova, *L'algèbre de Boole*, coll. « Que sais-je ? », n° 1246, Presses Universitaires de France, 1969.

— *Ensembles flous :*

A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, Masson, 1973.

— *Combinatoire :*

C. Berge, *Principes de combinatoire*, Dunod.

• Ouvrages spécialisés :

— *La suite naturelle de cet ouvrage :*

J.-L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, coll. « SUP », Presses Universitaires de France, 1969.

— *Un ouvrage complet et accessible :*

A. Levy, *Basic set theory*, Springer-Verlag, 1979.

— *Le point de vue « bourbakiste » :*

M. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Hermann, 1970.

Histoire de la théorie des ensembles

Bell, *Development of mathematics*, Mac Graw Hill Book Company.

Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.

Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann.

J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1978.

Frege, *Les fondements de l'arithmétique*, Seuil.

F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Blanchard.

• Compléments et ouvertures sur d'autres domaines des mathématiques :

A. Bouvier et M. George, sous la direction de F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, Presses Universitaires de France, 1979.

INDEX

Mathématiciens cités

Frege (G.), 1848-1925.
Galilée (G.), 1564-1642.
Gauss (K. F.), 1777-1855.
Gödel (K.), 1906-1978.
Hadamard (J. S.), 1865-1963.
Hasse (H.), 1898- .
Hilbert (D.), 1862-1943.
Krull (W.), 1899-1970.
Lebesgue (H. L.), 1875-1941.
Levi (B.), 1875-1961.
Lobatchevsky (N. I.), 1793-1856.
Minkowski (H.), 1864-1902.
Poincaré (H. J.), 1854-1912.
Pythagore, VIe siècle av. J.-C.
Russell (B.), 1872-1970.
Stirling (J.), 1692-1770.
Skolem (T. A.), 1887-1963.
Steinitz (E.), 1871-1928.
Tarski (A.), 1902- .
Thalès, 624-546 av. J.-C.
Théétète.
Van Neumann (J.), 1903-1957.
Veitch (E. W.).
Venn (J.), 1834-1923.
Weirstrass (K. T.), 1815-1897.
Whitehead (A.), 1861-1947.
Zadeh (L. A.).
Zénon, Ve siècle av. J.-C.
Zermelo (E.), 1871-1953.
Zorn (M.), 1906- .

INDEX DES NOTATIONS

$\in$	appartient à
$\notin$	n'appartient pas à
$\{a\}$	singleton
$\{a, b\}$	paire
$\{x/\dots\}$	ensemble des éléments x vérifiant une propriété donnée
(x, y)	couple
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$	n-uple
$\subset$; $\subseteq$	inclusion
$\subsetneqq$; $\subsetneq$; $\subset$	inclusion stricte
$\supset$	contient
$\cup$	réunion
$\cap$	intersection
$-$; $\setminus$	différence
Δ	différence symétrique
$\bigcup_{i \in I} A_i$	réunion de la famille de parties $(A_i)_{i \in I}$
$\bigcap_{i \in I} A_i$	intersection de la famille de parties $(A_i)_{i \in I}$
$\complement_E A$; A	complémentaire de A
$\varnothing$	ensemble vide
$E \times F$	produit cartésien
E^n	ensemble des n-uples d'éléments de E

$\prod_{i \in I} E_i$	produit ensembliste des E_i
μ_A	fonction caractéristique de la partie A de E
$\mathfrak{P}(E)$	ensemble des parties de E
$\# E, \bar{E}, \bar{\bar{E}}$; Card E ; $\lvert E \rvert$	cardinal de E
$\aleph_0$	aleph zéro (Cardinal de **N**)
$\aleph_\alpha$	aleph alpha
ω	plus petit ordinal infini
Ω	plus petit ordinal non dénombrable
$x \mathcal{R} y$	x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$
$f : E \to F$	f est une application de E dans F
$f : x \mapsto y$	x a pour image y par l'application f
$f(x)$	image de x par f
$f^{-1}(x)$	image réciproque de x par f
$f(E)$	image de l'ensemble E par f
$\mathrm{Im} f$	image de f
$f\lvert_E$	restriction de f à E
$\mathcal{R}^{-1}$	relation réciproque de la relation $\mathcal{R}$
f^{-1}	bijection réciproque de la bijection f
$f \circ g$	composée des applications f et g
I_E ou id_E	application identique sur E

Ensembles de nombres

N	ensembles des entiers naturels
Z	ensembles des entiers rationnels
Q	ensemble des nombres rationnels
D	ensemble des nombres décimaux
R	ensemble des nombres réels
C	ensemble des nombres complexes
$\mathbf{Q}(i)$	ensemble des nombres complexes $a + ib$ avec $a \in \mathbf{Q}$ et $b \in \mathbf{Q}$
$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$	ensemble des nombres réels $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbf{Q}$ et $b \in \mathbf{Q}$
$\mathbf{Z}[i]$	ensemble des entiers de Gauss
$\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$	ensemble des nombres réels $a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Z}$
$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	ensemble des classes résiduelles d'entiers modulo n
$n\mathbf{Z}$	ensemble des multiples de n

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Août 1982 —